DS 9 spécialité maths première 16 mai 2022

Exercice 1 (10 points)

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.

On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$.

Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.

Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel n *non nul, on considère l'évènement :*

- T_n *: le manchot utilise le toboggan lors de son* n*-ième passage.*
- P_n *: le manchot utilise le plongeoir lors de son* n*-ième passage.*

On considère alors la suite (u_n) *définie pour tout entier naturel* $n \geqslant 1$ *par :*

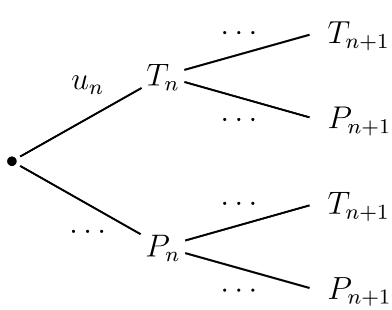
$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ *est la probabilité de l'évènement* T_n.

1. (a) *Donner les valeurs des probabilités* $p(T_1)$, $p(P_1)$ *et des probabilités conditionnelles* $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.

   (b) *Montrer que* $p(T_2) = \dfrac{1}{4}$.

   (c) *Recopier et compléter l'arbre suivant :*



   (d) *Démontrer que pour tout entier* $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.

   (e) *À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite* (u_n).

2. *On considère la suite* (v_n) *définie pour tout entier naturel* $n \geqslant 1$ *par :*

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

   (a) *Démontrer que la suite* (v_n) *est géométrique de raison* $\dfrac{1}{10}$*. Préciser son premier terme.*

(b) *Exprimer* v_n *en fonction de* n*. En déduire l'expression de* u_n *en fonction de* n*.*

(c) *Calculer la limite de la suite* (u_n)*. Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en* ***1. e.*** *?*

Exercice 2 (10 points)
Dans un repère orthonormé , on donne les points A(2;2) , B(4;5) et C(7;2) . On note I le milieu de [AC] et J le milieu de [BC] .

1. *Déterminer une équation de la médiatrice de [BC]*
2. *Déterminer une équation de la médiatrice de [AC]*
3. *Déterminer les coordonnées de K centre du cercle circonscrit du triangle ABC*
4. *Déterminer une équation du cercle circonscrit du triangle ABC*
5. *Déterminer les coordonnées de L et R points d'intersection du cercle circonscrit avec la médiatrice de [AC]*

Exercice 3 (10 points)
Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région.

Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 *nouvelles colonies chaque printemps.*

1. *On considère l'algorithme suivant :*

Variables :	n *est un nombre entier naturel*
	C *est un nombre réel*
Traitement :	*Affecter à* C *la valeur 300*
	Affecter à n *la valeur 0*
	Tant que $C < 400$ *faire*
	C *prend la valeur* $C - C \times 0,08 + 50$
	n *prend la valeur* $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	*Afficher* n

(a) *Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.*

Test $C < 400$		vrai		...
Valeur de C	300	326		...
Valeur de n	0	1		...

(b) *Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.*

2. *On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite* (C_n) *le terme* C_n *donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année* $2014+n$. *Ainsi* $C_0 = 300$ *est le nombre de colonies en 2014.*

   (a) *Exprimer pour tout entier* n *le terme* C_{n+1} *en fonction de* C_n.

   (b) *On considère la suite* (V_n) *définie pour tout entier* n *par* $V_n = 625 - C_n$.
   Montrer que pour tout nombre entier n *on a* $V_{n+1} = 0,92 \times V_n$.

   (c) *En déduire que pour tout entier naturel* n, *on a* $C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$.

   (d) *Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024 ?*

Exercice 4 (10 points)

Partie A

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ *La courbe de f coupe l'axe des ordonnées au point A(0;-4) et admet une tangente horizontale au point d'abscisse -1 . Déterminer a et b .*

Partie B

On s'intéresse à la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = -2(x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. *Justifier que* $f'(x) = 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ *où* f' *est la fonction dérivée de* f.

2. *En déduire les variations de la fonction* f.

3. *Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0*

4. *Tracer la courbe de f .*