

Exercice 1 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 24x + 32$

1. Résoudre $f(x) = 0$

$$\Delta = 64 \text{ donc } x_1 = \frac{24 - 8}{8} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{24 + 8}{8} = 4$$

2. Résoudre $f(x) \geq 0$

f est du signe de $a = 4 > 0$ à l'extérieur des racines donc $S =]-\infty; 2] \cup [4; +\infty[$

3. Factoriser $f(x)$

$$f(x) = 4(x - 2)(x - 4)$$

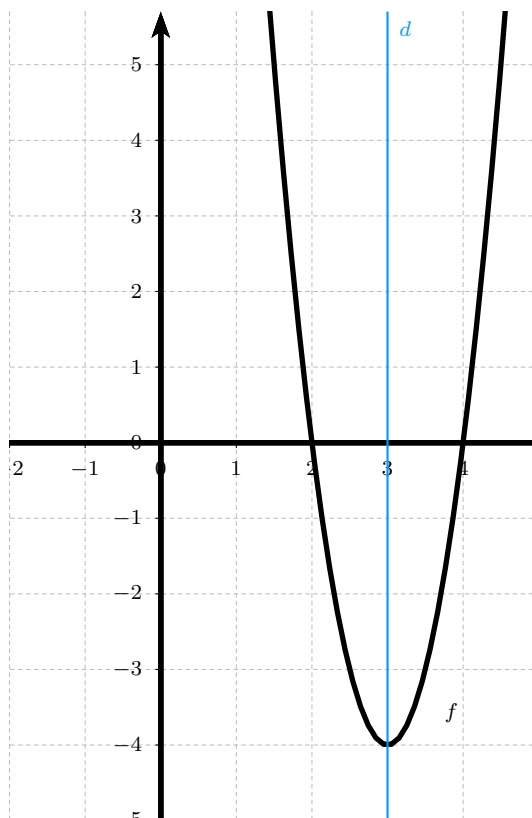
4. Déterminer le sommet de la parabole représentant f ainsi que l'équation de son axe de symétrie .

$$\text{On a : } -\frac{b}{2a} = \frac{24}{8} = 3$$

$$\text{et } f(3) = -4$$

Donc : $S(3; -4)$ et l'axe de symétrie a pour équation $x = 3$

5. Tracer la courbe de f



Exercice 2 (6 points)

1. Dériver : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 7$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$$

2. Dériver : $f(x) = (3x - 8)(x^2 - 4x + 7)$

$$f'(x) = 3(x^2 - 4x + 7) + (2x - 4)(3x - 8) = 9x^2 - 16x + 53$$

3. Dériver : $\frac{3}{5x - 7}$

$$f'(x) = -\frac{3 \times 5}{(5x - 7)^2} = -\frac{15}{(5x - 7)^2}$$

4. Dériver : $\sqrt{8x^2 - 4x + 4}$

$$f'(x) = \frac{16x - 4}{2\sqrt{8x^2 - 4x + 4}} = \frac{8x - 2}{\sqrt{8x^2 - 4x + 4}}$$

5. Dériver : $\frac{9x - 7}{2 - x}$

$$f'(x) = \frac{9(2 - x) + 9x - 7}{(2 - x)^2} = \frac{11}{(2 - x)^2}$$

Exercice 3 (8 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

1. Déterminer la dérivée de f

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 10$$

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

L'équation de la tangente est de la forme $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ donc ici $f'(0) = -10$ et $f(0) = 24$ donc $y = -10x + 24$

3. Déterminer la position relative de la courbe de f avec cette tangente

$$\text{Soit } g(x) = f(x) - (-10x + 24) = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$$

Etudions le signe de g :

x^2 est toujours positif donc g est du signe de $x - 3$

On a donc : $g(x) > 0$ si $x \in]3; +\infty[$

La courbe est donc en dessous de sa tangente sur $] - \infty; 3[$ et au dessus de sa tangente sur $]3; +\infty[$

4. Déterminer a , b et c réels tels que $f(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$

$$ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \text{ Par identification : } a = 1, \\ -2c = 24 \iff c = -12 \text{ et } b - 2a = -3 \iff b = -3 + 2 = -1$$

$$\text{Donc } f(x) = (x - 2)(x^2 - x - 12)$$

5. Résoudre : $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \iff x - 2 = 0 \text{ ou } x^2 - x - 12 = 0$$

Première solution $x = 2$

Réolvons maintenant $x^2 - x - 12 = 0$

$$\Delta = 49 \text{ donc } x_1 = \frac{1-7}{2} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{1+7}{2} = 4$$

Les solutions sont donc $x = 2$, $x = -3$ ou $x = 4$

6. Résoudre : $f(x) \leq 0$

On fait un tableau de signes :

x	$-\infty$	-3	2	4	$+\infty$
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x^2 - x - 12$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$$S =] - \infty; -3] \cup [2; 4]$$