DS 4 spécialité maths première 6 décembre 2021

Exercice 1 (8 points)

Soit la fonction f définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ *par* $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$

1. *Déterminer a , b et c réels tels que :* $f(x)=ax+b+\dfrac{cx}{x-1}$

   $$f(x)=ax+b+\frac{cx}{x-1}=\frac{(ax+b)(x-1)+cx}{x-1}=\frac{ax^2+(b-a+c)x-b}{x-1}$$

   Par identification : $a=1$, $b=-1$ *et* $b-a+c=1$ *donc* $c=3$

   $$f(x)=x-1+\frac{3x}{x-1}$$

2. *Déterminer f'(x)*

   $$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$$

3. *Etudier les variations de f*

   $(x-1)^2>0$ *donc f'(x) est du signe de* x^2-2x-2

   $\Delta=4+8=12$ *donc* $x_1=\dfrac{2+2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$ *et* $x_2=1-\sqrt{3}$

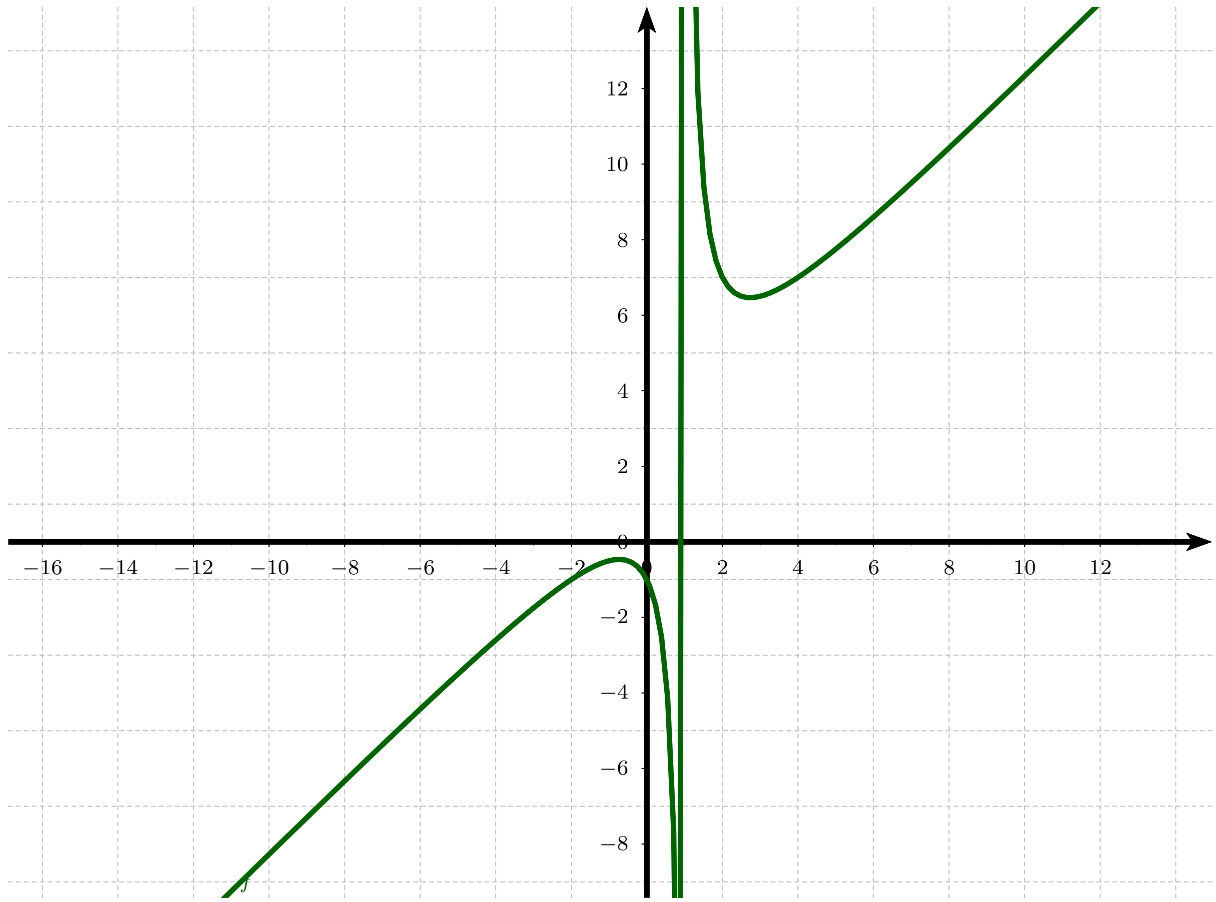
   Tableau de variations :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$3-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$3+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	

4. *Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0*

   $y=-2x-1$

5. *Tracer la courbe de f*



Exercice 2 (8 points)

On donne la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$. On pose $v_n = u_n - 1$

1. *Déterminer la nature de la suite (v_n) et préciser ses éléments caractéristiques*

   $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 3u_n - 2 - 1 = 3u_n - 3 = 3(u_n - 1)$

   (v_n) est donc une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 3$

2. *Exprimer v_n en fonction de n*

   $v_n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}$

3. *En déduire l'expression de u_n en fonction de n*

   $u_n = v_n + 1 = 3^{n+1} + 1$

4. *Etudier les variations de (u_n)*

   $u_{n+1} - u_n = 3^{n+2} + 1 - 3^{n+1} - 1 = 3^{n+1}(3 - 1) = 2 \times 3^{n+1} > 0$

   La suite (u_n) est donc croissante

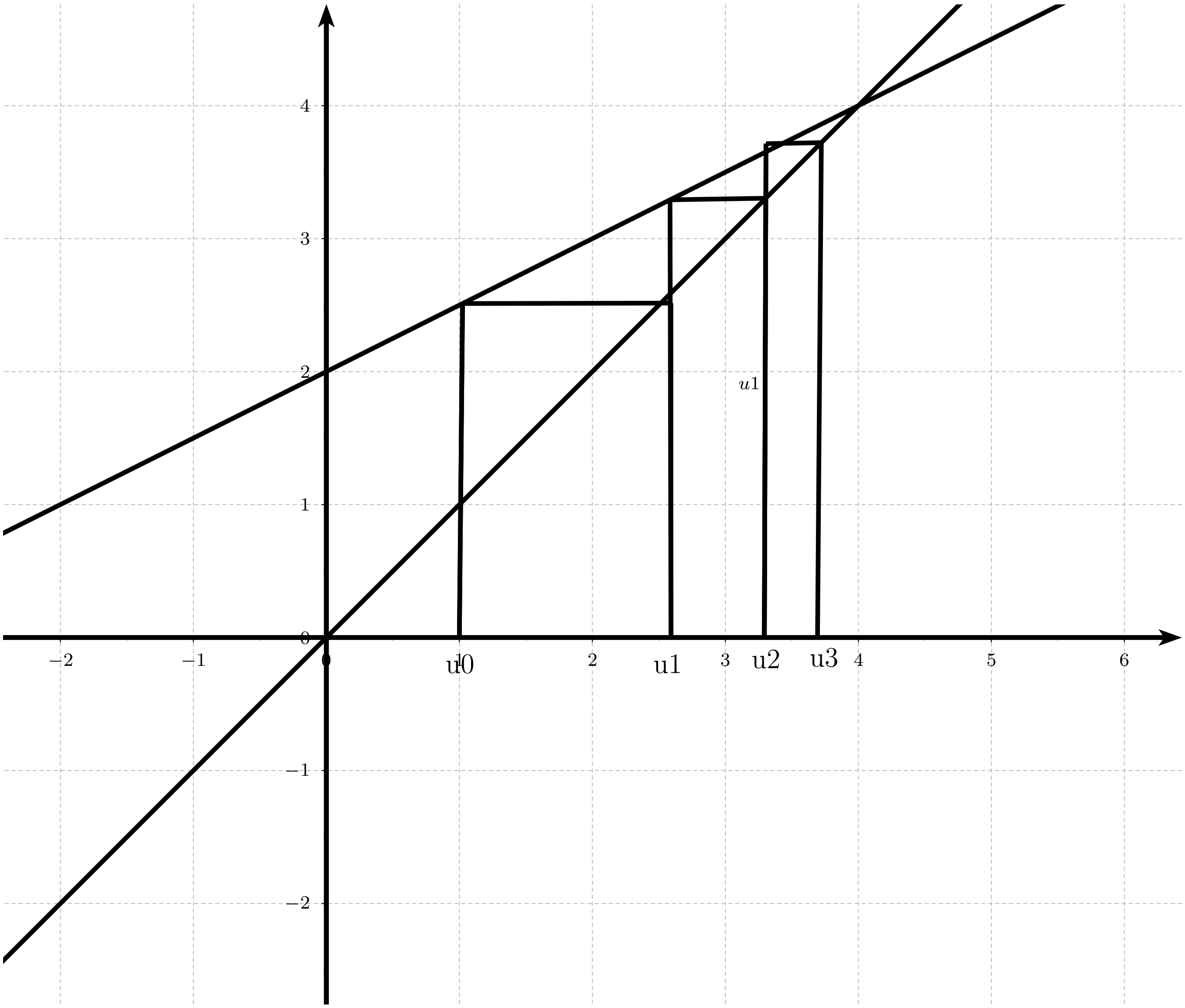
Exercice 3 (4 points)

Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$

1. *Sur le graphique au dos , tracer les quatre premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses*

2. *Ecrire un algorithme en langage python qui affiche les 10 premiers termes de cette suite .*

```
def termes():
    u=1
    for k in range (1,10):
        u=0.5u+2
    return u
```


4
3
2
1
0
−1
−2
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
u0
u1
u2
u3
$u1$