DS 5 spécialité maths première 17 janvier 2022

Exercice 1 (10 points)
Soient deux suites (u_n) *et* (v_n) *définies par :* $u_0 = 4$, $u_{n+1} = 7u_n - 12$ *et* $v_n = u_n - 2$

1. *Déterminer la nature de la suite* (v_n) *et préciser ses éléments caractéristiques*

   $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 7u_n - 12 - 2 = 7u_n - 14 = 7(u_n - 2) = 7v_n$

   Donc (v_n) *est une suite géométrique de raison 7 et de premier terme* $v_0 = u_0 - 2 = 2$

2. *Exprimer* v_n *en fonction de n*

   $v_n = 2 \times 7^n$

3. *En déduire l'expression de* u_n *en fonction de n*

   $u_n = v_n + 2 = 2 \times 7^n + 2$

4. *Etudier les variations de* (u_n)

   $u_{n+1} - u_n = 2 \times 7^{n+1} - 2 \times 7^n = 2 \times 7^n(7-1) = 2 \times 7^n \times 6 > 0$ *donc* (u_n) *est croissante*

Exercice 2 (10 points)
Soit ABC un triangle isocèle en A de périmètre 10 cm . On note H le pied de la hauteur issue de A . On note $BC = x$

Le but de l'exercice est de déterminer x pour que l'aire du triangle ABC soit maximale .

1. *A quel intervalle appartient x ?*

   On sait que le triangle est isocèle en A et que le périmètre est égal à 10 donc on peut travailler sur [0;5]

2. *Montrer que* $AC = \dfrac{10-x}{2}$

   $x + AB + AC = 10 \iff x + 2AC = 10 \iff AC = \dfrac{10-x}{2}$

3. *Déterminer AH en fonction de x*

   Par Pythagore : $AH^2 = AC^2 - CH^2 = \left(\dfrac{10-x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{x^2 - 20x + 100 - x^2}{4} = 25 - 5x$

4. *Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à* $\dfrac{x}{2}\sqrt{25-5x}$

   $Aire = \dfrac{AH \times BC}{2} = \dfrac{x \times \sqrt{25-5x}}{2}$

5. *On pose* $f(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{25-5x}$.

   (a) *Montrer que :* $f'(x) = \dfrac{50-15x}{4\sqrt{25-5x}}$

   $$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{25-5x} + \frac{x}{2} \times \frac{-5}{2\sqrt{25-5x}} = \frac{2(25-5x) - 5x)}{4\sqrt{25-5x}} = \frac{50-15x}{4\sqrt{25-5x}}$$

(b) *Déterminer les variations de f*

$4\sqrt{25-5x} > 0$ *donc* $f'(x)$ *est du signe de* $50-15x$

x	0		$\frac{10}{3}$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{25}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

6. *Conclure*

L'aire est maximale pour $x = \dfrac{10}{3}$