DS 5 spécialité maths première 10 janvier 2022

Exercice 1 (10 points)

Soient deux suites (u_n) *et* (v_n) *définies par :* $u_0 = 3$, $u_{n+1} = 5u_n + 16$ *et* $v_n = u_n + 4$

1. *Déterminer la nature de la suite* (v_n) *et préciser ses éléments caractéristiques*

   $v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = 5u_n + 16 + 4 = 5u_n + 20 = 5(un + 4) = 5v_n$

   La suite (v_n) *est donc géométrique de raison 5 et de premier terme* $v_0 = 3 + 4 = 7$

2. *Exprimer* v_n *en fonction de n*

   $v_n = 7 \times 5^n$

3. *En déduire l'expression de* u_n *en fonction de n*

   $u_n = v_n - 4 = 7 \times 5^n - 4$

4. *Etudier les variations de* (u_n)

   $u_{n+1} - u_n = 7 \times 5^{n+1} - 7 \times 5^n = 7 \times 5^n(5 - 1) = 28 \times 5^n$

Exercice 2 (10 points)

Soit ABCD un carré de côté 1 . On place M sur [AB] et N sur (CB) tel que $AM = CN$ *. La droite (MN) coupe (CD) en P . On pose* $AM = x$

Le but de l'exercice est de déterminer x pour que PC soit maximale .

1. *A quel intervalle appartient x ?*

   $x \in [0; 1]$

2. *Déterminer PC en fonction de x*

   Par Thalès , on a: $\dfrac{NC}{NB} = \dfrac{PC}{MB} \iff \dfrac{x}{1+x} = \dfrac{PC}{1-x} \iff PC = \dfrac{x(1-x)}{1+x} = \dfrac{x-x^2}{1+x}$

3. *On pose* $f(x) = \dfrac{x - x^2}{1 + x}$.

   (a) *Calculer f'(x)*

   $f'(x) = \dfrac{(1-2x)(1+x) - (x-x^2)}{(1+x)^2} = \dfrac{-x^2 - 2x + 1}{(1+x)^2}$

   (b) *Déterminer les variations de f*

   $(1 + x)^2 > 0$ *donc f'(x) est du signe de* $-x^2 - 2x + 1$ *. Etudions le*
   $\Delta = 8$ *donc* $x_1 = -1 + \sqrt{2}$ *et* $x_2 = -1 - \sqrt{2}$

x	0		$\sqrt{2} - 1$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$3 - 2\sqrt{2}$	$\searrow$	0

4. *Conclure*

   Par lecture du tableau de variations , on voit que PC est maximale quand $x = \sqrt{2} - 1$