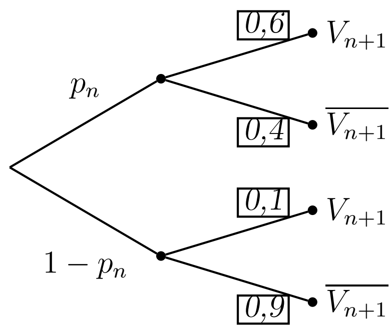
Exercice 1 (10 points)

1. (a) *A : D'après l'énoncé* $p(V_2) = 0,6$ *et* $p_{V_2}((V_3) = 0,6$, *donc* $p(V_2 \cap V_3) = p(V_2) \times p_{V_2}(V_3) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

   (b) *B : On a* $p(V_2) = 0,6 \Rightarrow p\left(\overline{V_2}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$ *et d'après l'énoncé* $p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,9$.
   Donc $p\left(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

2. *On a* $p_3 = p(V_3) = p(V_3 \cap V_2) + p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right)$.
   Or $p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}(V_3) = 0,4 \times (1 - 0,9) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$.
   Conclusion : $p_3 = 0,36 + 0,04 = 0,4$.

3. 

4. *On a (ce que l'on peut voir sur l'arbre) :*
   $p_{n+1} = p(V_{n+1}) = p(V_{n+1} \cap V_n) + p\left(V_{n+1} \cap \overline{V_n}\right) = p_n \times 0,6 + (1 - p_n) \times 0,1 = 0,6p_n - 0,1p_n + 0,1 = 0,5p_n + 0,1$.

5. (a) *Pour tout entier naturel* n *non nul,* $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n + 0,1 - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5(p_n - 0,2) = 0,5u_n$.
   Cette égalité montre que la suite u *est une suite géométrique de raison* $0,5$ *; son premier terme est* $u_1 = p_1 - 0,2 = 1 - 0,2 = 0,8$.

   (b) *On sait que pour tout entier naturel* n *non nul* $u_n = u_1 \times r^{n-1} = 0,8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{0,8}{2^{n-1}}$.
   De la définition de u_n *il résulte que* $p_n = 0,2 + \frac{0,8}{2^{n-1}}$.

   (c) *On sait que* $0 < \frac{1}{2} < 1$ *entraîne que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{0,8}{2^{n-1}} = 0$, *donc* $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,2$.

Exercice 2 (10 points)

On désigne par f *la fonction définie sur l'intervalle* $[-2\ ;\ 4]$ *par*

$$f(x) = (2x + 1)e^{-2x} + 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ *la courbe représentative de* f *dans un repère.*

1. *On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$.*

   Pour tout $x \in [0\,;\,5]$, $f(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x) + 3$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.

   En écrivant $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$,

   $f'(x) = 2\times \mathrm{e}^{-2x} + (2x+1)\times(-2\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-2x}\left(2 + (2x+1)\times(-2)\right) = \mathrm{e}^{-2x}\left(2 - 4x - 2\right) = -4\mathrm{e}^{-2x}$.

2. *$\forall x \in [-2\,;\,4]$, $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-4x$.*

   Le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ est :

x	-2		0		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			4		
	$-3\mathrm{e}^{4} + 3$	$\nearrow$		$\searrow$	$9\mathrm{e}^{-8} + 3$

   $f(-2) = (2 \times -2 + 1)\mathrm{e}^{-2\times -2} + 3 = -3\mathrm{e}^{4} + 3 \approx -160,8$ $f(0) = (2 \times 0,6 + 1)e^{0} + 3 = 4$
   $f(4) = (2 \times 4)\mathrm{e}^{-2\times 4} + 3 = 9\mathrm{e}^{-8} + 3 \approx 3$

3. *Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$*

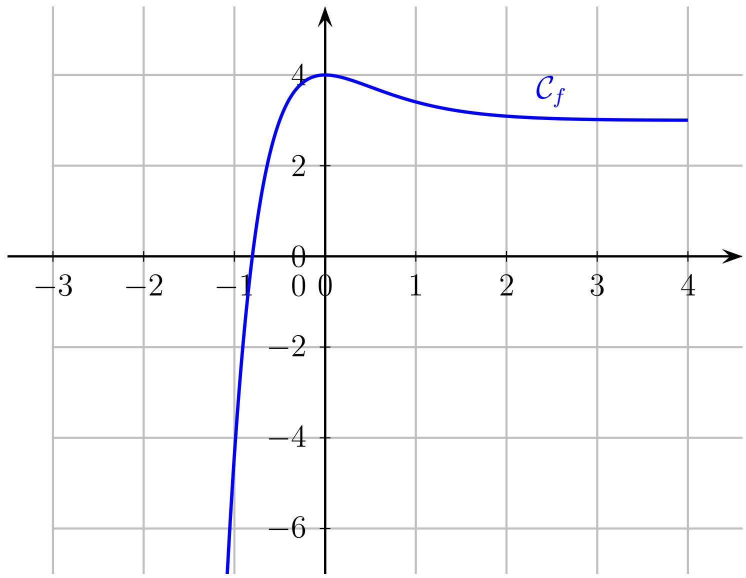
   $y = -2e^{-1}(x - \dfrac{1}{2}) + 2e^{-1} + 3$ *donc* $y = -\dfrac{2}{e}x + \dfrac{3}{e} + 3$

4. *Soit D la droite d'équation $y = 3$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et D .*

   On pose $g(x) = f(x) - 3 = (2x+1)e^{-2x}$. Le signe de g(x) est du signe de $2x + 1$

x		$-\frac{1}{2}$	
g(x)	-	0	+
position	C est en dessous de D		C est au dessus de D

5. *Tracer $\mathcal{C}_f$*


$\mathcal{C}_f$
4
2
0
−2
−4
−6
−3
−2
−1
0
1
2
3
4