

Exercice 1 (10 points)

Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur.

Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandé.

Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule :

$$P(x) = \frac{x + 300}{x + 100} \quad \text{pour } x \in [100 ; +\infty[.$$

Par exemple si le supermarché achète 300 kilogrammes de fruits, ces fruits lui sont vendus $P(300) = \frac{600}{400} = 1,50$ euros le kilogramme.

Dans ce cas, le supermarché devra payer $300 \times 1,5 = 450$ euros au fournisseur pour cette commande.

Partie A Étude du prix P proposé par le fournisseur

1. Montrer que $P'(x) = -\frac{200}{(x + 100)^2}$ sur $[100 ; +\infty[$.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction P .

Partie B Étude de la somme S à dépenser par le supermarché

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits (ces fruits étant vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme).

Cette somme est donc égale à $S(x) = xP(x)$ pour $x \in [100 ; +\infty[$.

1. Montrer que pour tout x appartenant à $[100 ; +\infty[: S'(x) = \frac{x^2 + 200x + 30\,000}{(x + 100)^2}$.

2. Montrer que pour tout x appartenant à $[100 ; +\infty[:$

$$S(x) = x + 200 - 20\,000 \times \frac{1}{x + 100}.$$

3. Dresser le tableau de variations de S

Exercice 2 (10 points)

En janvier 2016, une personne se décide à acheter un scooter coûtant 5 700 euros sans apport personnel. Le vendeur lui propose un crédit à la consommation d'un montant de 5 700 euros, au taux mensuel de 1,5%. Par ailleurs, la mensualité fixée à 300 euros est versée par l'emprunteur à l'organisme de crédit le 25 de chaque mois. Ainsi, le capital restant dû augmente de 1,5% puis baisse de 300 euros.

Le premier versement a lieu le 25 février 2016.

On note u_n le capital restant dû en euros juste après la n -ième mensualité (n entier naturel non nul). On convient que $u_0 = 5\,700$.

Les résultats seront donnés sous forme approchée à 0,01 près si nécessaire.

1. (a) Démontrer que u_1 , capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de 5 485,50 euros.
 (b) Calculer u_2 .
2. On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 1,015u_n - 300$$

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel u est un nombre réel		
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 700 Affecter à n la valeur 0 Tant que $u > 4 500$ faire <table style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">u prend la valeur $1,015 \times u - 300$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">n prend la valeur $n + 1$</td> </tr> </table> Fin Tant que	u prend la valeur $1,015 \times u - 300$	n prend la valeur $n + 1$
u prend la valeur $1,015 \times u - 300$			
n prend la valeur $n + 1$			
Sortie :	Afficher n		

- (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaires entre la deuxième et la dernière colonne.

Valeur de u	5 700				
Valeur de n	0				
$u > 4 500$ (vrai/faux)	vrai		vrai	faux	

- (b) Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20 000$.
 - (a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $v_{n+1} = 1,015 \times v_n$.
 - (b) En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = 20 000 - 14 300 \times 1,015^n$$
4. À l'aide de la réponse précédente, répondre aux questions suivantes :
 - (a) Démontrer qu'une valeur approchée du capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est 2 121,68 euros.
 - (b) Déterminer le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt.
 - (c) Quel sera le montant de la dernière mensualité ?
 - (d) Lorsque la personne aura terminé de rembourser son crédit à la consommation, quel sera le coût total de son achat ?