Exercice 1 (7 points)

Dans un repère orthonormé , on donne les points A(6;9) , B(12;3) , C(9;0) et D(3;6) .

1. *Montrer que ABCD est un parallélogramme*
2. *Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B .*
3. *Calculer* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ *et en déduire la valeur de* $\widehat{BAC}$

Exercice 2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 6] par

$$f(x) = ax + b - \frac{16}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels.}$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle [1 ; 6] et on note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.

La courbe représentative de f, donnée en annexe, coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 4 et admet une tangente horizontale au point A de coordonnées (2 ; 4).

1. (a) *Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$ et $f'(2)$.*
   (b) *En utilisant deux des quatre résultats de la question 1. a., déterminer les valeurs des réels a et b.*
2. *On admet que la fonction f est définie sur [1 ; 6] par*

$$f(x) = -4x + 20 - \frac{16}{x}.$$

   (a) *Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 6].*
   (b) *Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 6] en précisant uniquement les valeurs de $f(1)$, $f(2)$ et $f(4)$.*
   (c) *En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle [1 ; 6].*

Exercice 3 (7 points)

A - Observation d'une suite de nombres

1. *On donne ci-dessous la représentation graphique des 16 premiers termes d'une suite (u_n) dans le plan muni d'un repère orthogonal.*

   Conjecturer la limite de la suite (u_n).
2. *Les quatre premiers termes de la suite (u_n) ont été calculés avec un tableur :*

   $u_0 = 161$, $u_1 = 104,6$, $u_2 = 70,76$ *et* $u_3 = 50,456$

   La suite (u_n) peut-elle être une suite géométrique ? On justifiera la réponse donnée.

B - Étude de la suite

La suite (u_n) observée dans la partie A est définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,6u_n + 8$ et $u_0 = 161$.

1. *Calculer u_4.*
2. *Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.*
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique. On précisera le premier terme et la raison.
3. *Donner l'expression de v_n en fonction de n, puis l'expression de u_n en fonction de n.*
4. *Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n).*

ANNEXE