DS 8 spécialité maths première 27 mars 2023

Exercice 1 (10 points)
La société Vélibre , spécialisée dans la location de vélos, a été créée en janvier 2010 avec un parc de 150 vélos neufs.

Afin de conserver un parc de bonne qualité, le directeur de la société a décidé :

- *de racheter 40 vélos neufs en janvier de chaque année ;*
- *de revendre 20 % des vélos en janvier 2011 et en janvier 2012 ;*
- *de revendre 20 % au moins des vélos les plus usagés en janvier de chaque année suivante.*

1. *Pour tout nombre entier naturel n, on modélise le nombre approximatif de vélos du parc en janvier de l'année $2010 + n$ par les termes de la suite (U_n) définie pour tout nombre entier naturel n par*

$$U_{n+1} = 0,8U_n + 40 \text{ et } U_0 = 150$$

Vérifier que U_1 et U_2 correspondent bien au nombre prévu de vélos du parc pour janvier 2011 et janvier 2012.

2. *Pour connaître l'évolution du nombre approximatif de vélos du parc, le directeur utilise un tableur. Voici un extrait de sa feuille de calcul :*

	A	B	C	D	E
1	Valeur de n	Valeur de U_n		Valeur de n	Valeur de U_n
2	0	150		18	199,10
3	1	160		19	199,28
4	2	168		20	199,42
5	3	174,4		21	199,54
6	4	179,52		22	199,63
7	5	183,62		23	199,70
8	6	186,89		24	199,76
9	7	189,51		25	199,81
10	8	191,61		26	199,85
11	9	193,29		27	199,88
12	10	194,63		28	199,90
13	11	195,71		29	199,92
14	12	196,56		30	199,94

   (a) *Conjecturer le sens de variation de la suite (U_n).*
   (b) *Quelle semble être la limite de la suite (U_n) ?*

3. *Pour tout nombre entier naturel n, on pose $V_n = U_n - 200$.*

   (a) *Prouver que la suite (V_n) est géométrique de raison $0,8$. Déterminer son premier terme.*

(b) *En déduire, pour tout nombre entier naturel n, l'expression de V_n puis celle de U_n en fonction du nombre entier n.*

(c) *Déterminer la limite de la suite (U_n).*

(d) *Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a :*

$$U_{n+1} - U_n = 10 \times 0,8^n$$

(e) *En déduire le sens de variation de la suite (U_n).*

4. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   La municipalité prévoit d'implanter de nouvelles bornes dans la ville afin d'offrir aux usagers 250 emplacements. La société Vélibre pourra-t-elle satisfaire cette demande ? Argumenter la réponse.

Exercice 2 (10 points)

Une entreprise fabrique chaque mois x tonnes d'un certain produit, avec x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ 6]$. Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production mensuelle de x tonnes est donné par $C(x)$, où C est la fonction définie par :

$$C(x) = \frac{0,01\mathrm{e}^x + 2}{x}.$$

1. *À l'aide de la calculatrice :*

   (a) *conjecturer en terme de variations l'évolution du coût moyen de fabrication sur l'intervalle $]0\ ;\ 6]$;*

   (b) *estimer le minimum du coût moyen de fabrication et la production mensuelle correspondante ;*

   (c) *dire s'il est possible d'atteindre un coût moyen de fabrication de 4000 euros. On précisera la méthode utilisée.*

2. *On désigne par C' la fonction dérivée de la fonction C. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ 6]$:*

$$C'(x) = \frac{0,01x\mathrm{e}^x - 0,01\mathrm{e}^x - 2}{x^2}.$$

3. *On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 6]$ par :*

$$f(x) = 0,01x\mathrm{e}^x - 0,01\mathrm{e}^x - 2.$$

   On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

(a) *Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle* $]0\ ;\ 6]$

$$f'(x) = 0,01x\mathrm{e}^{x}.$$

(b) *Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle* $]0\ ;\ 6]$.

(c) *On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur l'intervalle* $[4; 5]$.
A l'aide de la calculatrice , donner la valeur arrondie au dixième du nombre réel α.

(d) *Déduire des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur l'intervalle* $]0\ ;\ 6]$.

4. *À l'aide des questions précédentes, justifier que le minimum du coût moyen de fabrication est obtenu pour une production mensuelle de α tonnes du produit.*