Exercice 1 (5 points)

Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 150 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,8u_n + 45.$$

1. *Calculer u_1 et u_2.*

2. *Voici deux propositions d'algorithmes :*

Algorithme 1	Algorithme 2
Variables :	***Variables :***
N est un entier naturel	*N est un entier naturel*
U est un nombre réel	*U est un nombre réel*
Initialisation:	***Initialisation:***
U prend la valeur 150	*U prend la valeur 150*
N prend la valeur 0	*N prend la valeur 0*
Traitement :	***Traitement :***
Tant que $U \geqslant 220$	*Tant que $U < 220$*
U prend la valeur $0,8 \times U + 45$	*U prend la valeur $0,8 \times U + 45$*
N prend la valeur $N + 1$	*N prend la valeur $N + 1$*
Fin Tant que	*Fin Tant que*
Sortie :	***Sortie :***
Afficher N	*Afficher N*

   (a) *Un seul de ces algorithmes permet de calculer puis d'afficher le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 220$.*

   Préciser lequel en justifiant pourquoi l'autre algorithme ne le permet pas.

   (b) *Quelle est la valeur numérique affichée par l'algorithme choisi à la question précédente ?*

3. *On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :*

   $v_n = u_n - 225.$

   (a) *Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser son premier terme et sa raison.*

   (b) *En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 225 - 75 \times 0,8^n$.*

4. *Une petite ville de province organise chaque année une course à pied dans les rues de son centre. En 2015, le nombre de participants à cette course était de 150.*

   On fait l'hypothèse que d'une année sur l'autre :

   - *20 % des participants ne reviennent pas l'année suivante ;*
   - *45 nouveaux participants s'inscrivent à la course.*

La petite taille des ruelles du centre historique de la ville oblige les organisateurs à limiter le nombre de participants à 250.

Vont-ils devoir refuser des inscriptions dans les années à venir ? Justifier la réponse.

Exercice 2 (5 points)

Pour l'année scolaire, un professeur de mathématiques propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : Approfondissement ou Ouverture culturelle .

Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés.

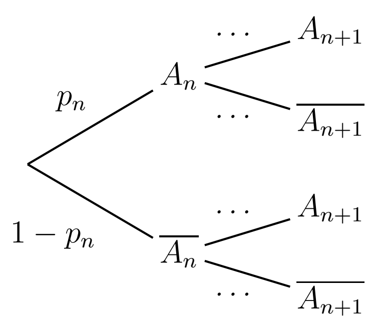
La première semaine, 20 % des élèves de la classe ont choisi Approfondissement et tous les autres ont choisi Ouverture culturelle . On admet que

- *20 % des élèves ayant choisi Ouverture culturelle une certaine semaine s'inscrivent en Approfondissement la semaine suivante ;*
- *30 % des élèves ayant choisi Approfondissement une certaine semaine s'inscrivent en Ouverture culturelle la semaine suivante.*

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines. Chaque semaine, on interroge au hasard un élève de la classe.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'évènement l'élève a choisi Approfondissement la n-ième semaine et p_n la probabilité de l'évènement A_n. On a alors $p_1 = 0,2$.

1. *Recopier l'arbre ci-dessous et remplacer chacun des quatre pointillés par la probabilité correspondante.*



2. *Montrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$.*
3. *On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :*

$$u_n = p_n - 0,4.$$

   (a) *Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de son premier terme u_1.*

(b) *En déduire pour tout entier naturel n l'expression de u_n en fonction de n, puis l'expression de p_n en fonction de n.*

(c) *Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.*

4. *On considère l'algorithme suivant :*

Variables	*I et N sont des entiers naturels strictement supérieurs à 1* *P est un nombre réel*
Entrée	*Saisir N*
Initialisation	*P prend la valeur $0,2$*
Traitement	*Pour I allant de 2 à N :* *P prend la valeur $0,5P + 0,2$* *Fin Pour*
Sortie	*Afficher P*

(a) *Écrire ce qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $N = 5$.*

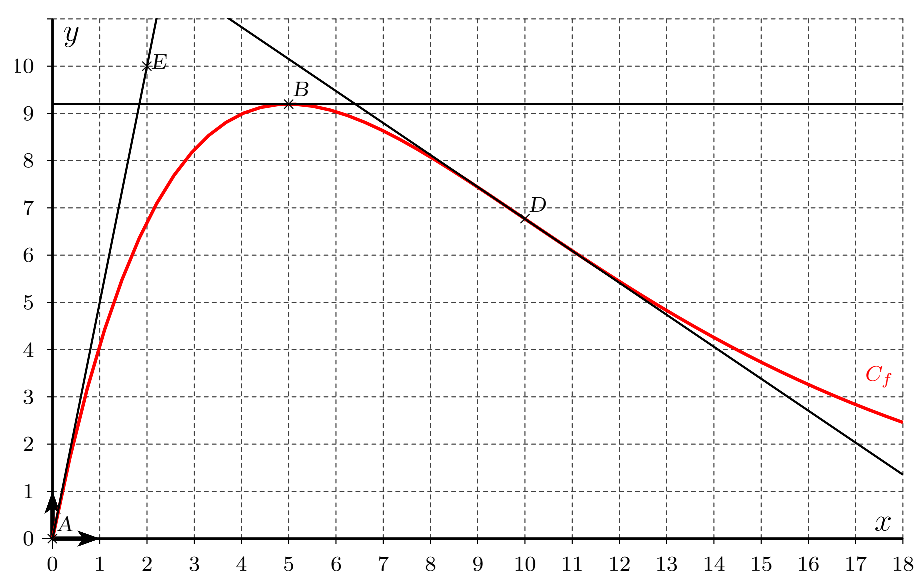
(b) *Modifier l'algorithme afin qu'il affiche le numéro de la première semaine pour laquelle le pourcentage des élèves de la classe ayant choisi Approfondissement dépasse $39,9$.*

Exercice 3 (5 points)

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 18]$ ainsi que les tangentes au point A d'abscisse 0, au point B d'abscisse 5 et au point D d'abscisse 10.

On sait aussi que la tangente au point A passe par le point E de coordonnées $(2 ; 10)$ et que la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



1. *Donner les valeurs de $f'(5)$ et de $f'(0)$.*

2. *Donner l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0*

PARTIE B

Une entreprise s'apprête à lancer sur le marché français un nouveau jouet destiné aux écoliers. Les ventes espérées ont été modélisées par la fonction f dont la courbe représentative C_f a été tracée ci-dessus.

En abscisses, x représente le nombre de jours écoulés depuis le début de la campagne publicitaire.

En ordonnées, $f(x)$ représente le nombre de milliers de jouets vendus le x-ième jour.

Ainsi, par exemple, le 10-ième jour après le début de la campagne publicitaire, l'entreprise prévoit de vendre environ 6 800 jouets.

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 18]$ par $f(x) = 5xe^{-0,2x}$.

1. *Montrer que $f'(x) = (5-x)e^{-0,2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 18]$.*

2. *Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ 18]$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ 18]$.*

3. *Déterminer le nombre de jours au bout duquel le maximum de ventes par jour est atteint. Préciser la valeur de ce maximum, arrondie à l'unité.*

Exercice 4 (5 points)

Dans un repère orthonormal , on donne les points A(2;7) , B(6;3) et C(1;-2) .

1. *Montrer que le triangle ABC est rectangle en B*

2. *Calculer l'aire du triangle ABC*

3. *Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC) . Déterminer BH*

4. *On admet que l'équation de la droite (AC) est $9x - y - 11 = 0$. Déterminer les coordonnées de H .*