DS 3 spécialité maths première 18 octobre 2022

Exercice 1 (10 points)
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

1. *Déterminer f'(x)*

   $f'(x) = 3x^2 - 6x - 10$

2. *Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0*

   $y = f'(0)x + f(0)$

   $y = -10x + 24$

3. *Etudier la position relative de la courbe de f par rapport à cette tangente*

   On étudie le signe de $f(x) - (-10x + 24) = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$

   La courbe de f est donc en dessous de sa tangente sur $]-\infty; 3[$ et au-dessus sur $]3; +\infty[$

4. *Déterminer a , b et c tels que $f(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$*

   $ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

   Par identification :

   $a = 1$, $b - 2a = -3$, $c - 2b = -10$ *et* $-2c = 24 \iff c = -12$ *donc* $b = -1$

   Donc $f(x) = (x - 2)(x^2 - x - 12)$

5. *Résoudre $f(x) = 0$*

   Résolvons $x^2 - x - 12 = 0$

   $\Delta = 49$ *donc* $x_1 = 4$ *et* $x_2 = -3$

   Les solutions de $f(x) = 0$ sont donc $x = 2$, $x = 4$ ou $x = -3$

6. *Résoudre $f(x) < 0$*

   Avec un tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		2		4		$+\infty$
$x - 2$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	⋮	$+$	
$x^2 - x - 12$		$+$	0	$-$	⋮	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   $S =]-\infty; -3[\cup]2; 4[$

Exercice 2 (5 points)
Déterminer la dérivée des fonctions :

1. $f(x) = (3x - 8)(2x + 7)$

   $f'(x) = 3(2x + 7) + 2(3x - 8) = 12x + 5$

2. $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{3x - 4}$

   $g'(x) = \dfrac{(2x-5)(3x-4) - 3(x^2 - 5x + 7)}{(3x-4)^2} = \dfrac{3x^2 - 8x - 1}{(3x-4)^2}$

3. $h(x) = \sqrt{5x^2 - 4x + 7}$

   $h'(x) = \dfrac{10x - 4}{2\sqrt{5x^4 - 4x + 7}} = \dfrac{5x - 2}{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}$

Exercice 3 (5 points)

On note (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$

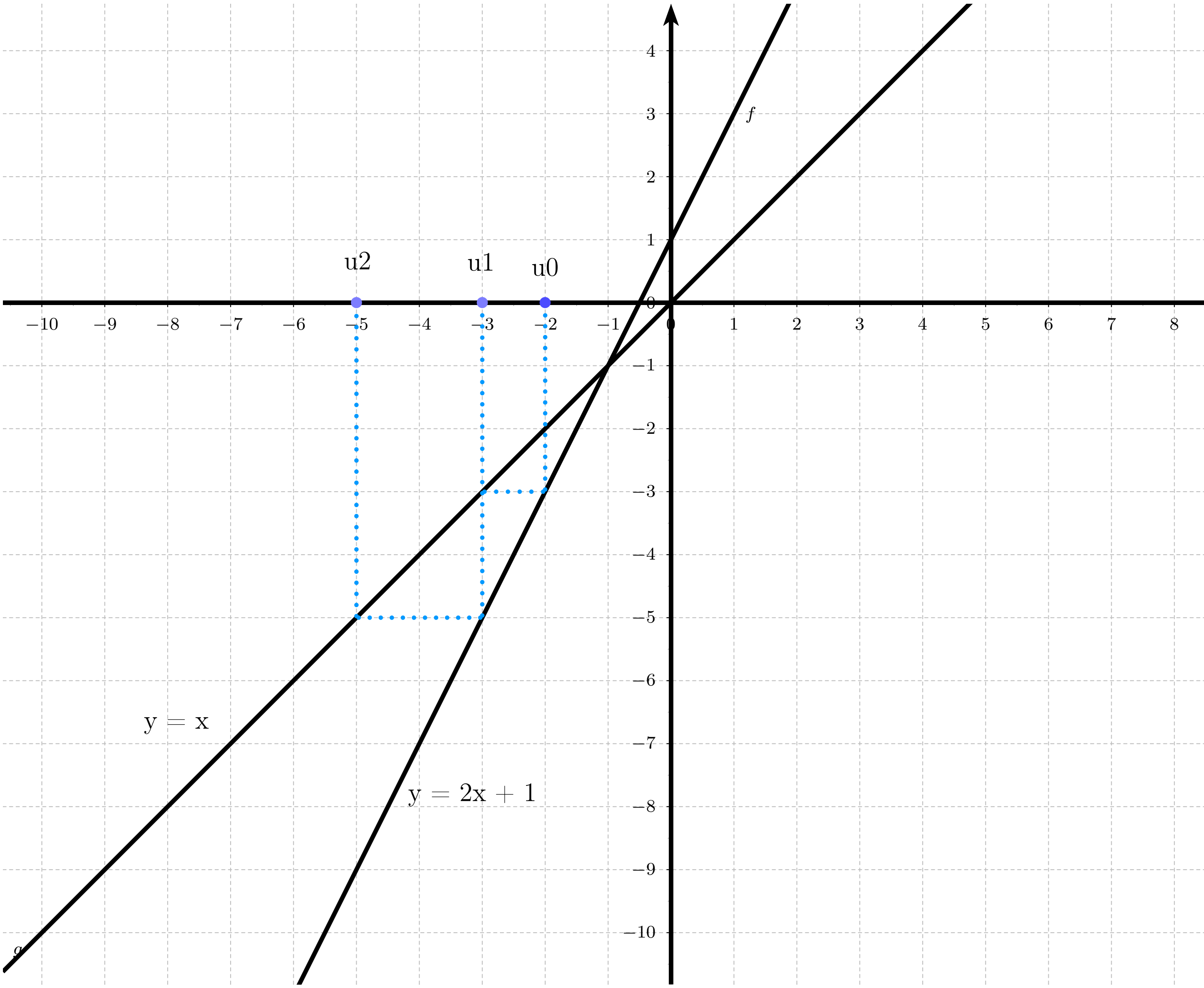
1. *Tracer , en laissant les traits de construction apparents , sur le graphique ci-dessous les 3 premiers termes de la suite*

2. *Calculer $u_{12} = -4097$*

3. *On note $v_n = u_n + 1$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique .*

   $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) = 2v_n$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 2


u2
u1
u0
f
y = x
y = 2x + 1
g