Exercice 1 (10 points)

Partie A *Étude du prix P proposé par le fournisseur*

1. *P quotient de deux fonctions dérivables sur $[100\ ;\ +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas est dérivable et pour $x \in [100\ ;\ +\infty[$,*

   $P'(x) = \dfrac{1(x+100) - 1(x+300)}{(x+100)^2} = \dfrac{-200}{(x+100)^2}$.

2. *Comme $(x+100)^2 > 0$ quelque soit $x \geqslant 0$, le signe de $P'(x)$ est celui du numérateur, donc sur $[100\ ;\ +\infty[$, $P'(x) < 0$: la fonction P est décroissante avec $P(100) = \dfrac{400}{200} = 2$*

Partie B *Étude de la somme S à dépenser par le supermarché*

1. *En dérivant le produit sur $[100\ ;\ +\infty[$:*

   $S'(x) = P(x) + xP'(x) = \dfrac{x+300}{x+100} + x \times \dfrac{-200}{(x+100)^2} = \dfrac{(x+300)(x+100) - 200}{(x+100)^2} =$

   $\dfrac{x^2 + 400x + 30\,000 - 200x}{(x+100)^2} = \dfrac{x^2 + 200x + 30\,000}{(x+100)^2}$.

2. *On a $S(x) = \dfrac{x(x+300)}{x+100} = \dfrac{x(x+100+200)}{x+100} = \dfrac{x(x+100)}{x+100} + \dfrac{x \times 200}{x+100} = x + \dfrac{200x}{x+100}$;*

   Puis $S(x) = x + 200 - 200 + \dfrac{200x}{x+100} = x + 200 + \dfrac{-200x - 20\,000 + 200x}{x+100} = x + 200 - \dfrac{20\,000}{x+100}$.

3. *$(x+100)^2 > 0$ donc S'(x) est du signe de $x^2 + 200x + 30000$*

   $\Delta = -80000 < 0$ donc S'(x) est toujours positive et S(x) est croissante avec $S(100) = 200$

Exercice 2 (10 points)

1. (a) *Ajouter 1,5 % revient à multiplier par 1,015; si on augmente les 5 700 euros du départ de 1,5 %, on obtient $5\,700 \times 1,015 = 5\,785{,}50$ euros. Comme on verse 300 euros, on obtient $u_1 = 5\,785{,}50 - 300 = 5\,485{,}50$ euros.*

   (b) *De même $u_2 = 1,015u_1 - 300 = 5\,485{,}50 \times 1,015 - 300 \approx 5\,267{,}78$*

2. *La suite (u_n) est définie pour tout n par : $u_{n+1} = 1,015u_n - 300$.*

   On considère l'algorithme suivant:

Variables :	*n est un entier naturel* *u est un nombre réel*
Traitement :	*Affecter à u la valeur 5 700* *Affecter à n la valeur 0* *Tant que $u > 4\,500$ faire* *u prend la valeur $1,015 \times u - 300$* *n prend la valeur $n + 1$* *Fin Tant que*
Sortie :	*Afficher n*

(a) *On obtient le tableau ci-dessous:*

valeur de u	5700	5 485,50	5 267,78	5 046,80	4 822,50	4 594,84	4 363,76
valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
$u > 4500$	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

(b) *L'algorithme affiche à la fin de son exécution la valeur 6.*
Au bout du sixième remboursement, le capital restant dû sera inférieur à 4 500 euros.

3. *Soit la suite (v_n) définie pour tout n par $v_n = u_n - 20\,000$; donc*
$u_n = v_n + 20\,000$.

(a) $$v_{n+1} = u_{n+1} - 20\,000 = 1,015u_n - 300 - 20\,000 = 1,015u_n - 20\,300$$
$$= 1,015\left(u_n - \frac{20\,300}{1,015}\right) = 1,015\,(u_n - 20\,000) = 1,015 \times v_n$$

(b) $v_0 = u_0 - 20\,000 = 5\,700 - 20\,000 = -14\,300$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,015$ et de premier terme $v_0 = -14\,300$.
D'après les propriétés des suites géométriques, on en déduit que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = -14\,300 \times 1,015^n$.
Comme $u_n = v_n + 20\,000$, on déduit que $u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n$, pour tout n.

4. (a) *Le 26 avril 2017 correspond à $n = 15$.*
$u_{15} = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^{15} \approx 2\,121{,}68$ *euros*

(b) *On cherche n pour que $u_n = 0$:*
A la calculatrice , on trouve 23
La dernière mensualité sera la 23ème .

(c) *Le nombre u_{22} représente le capital à rembourser après avoir payé la 22ème mensualité, donc le montant de la 23ème et dernière mensualité.*
On a $u_{22} = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^{22} \approx 157,84$ euros.
Le montant de la 23ème et dernière mensualité est de $157,84 \times 1,015 \approx 160,21$ euros.

(d) *Le montant du remboursement sera de 22 mensualités de 300 euros auquel il faut rajouter 160,21 euros soit un montant total de $300 \times 22 + 160,21 = 6\,760{,}21$ euros.*