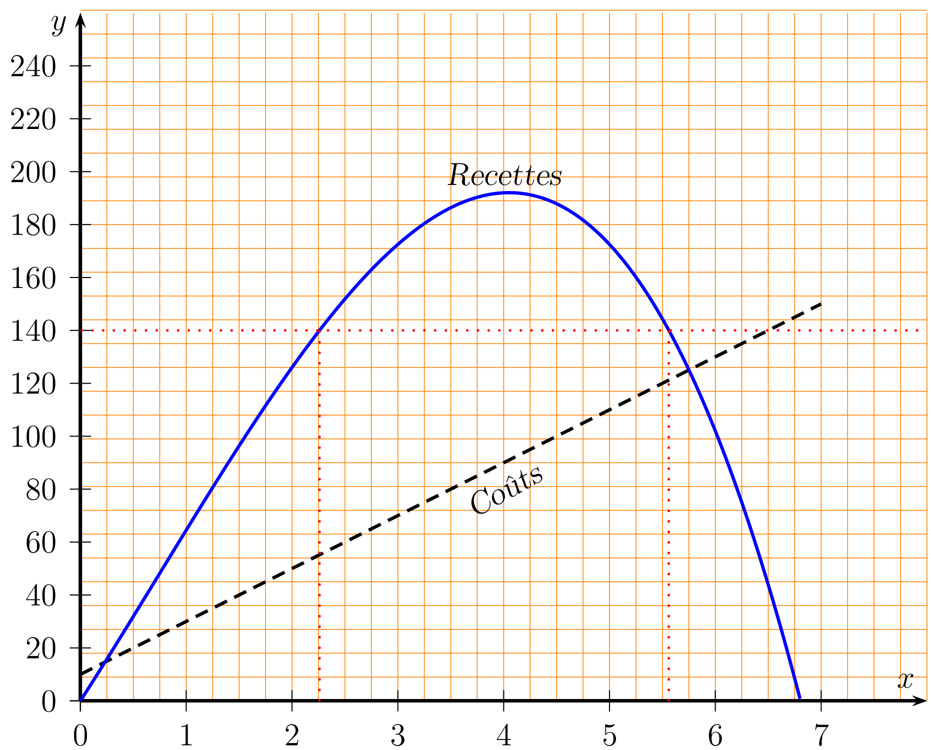
Exercice 1 (10 points)

Un entrepreneur lance sur le marché de nouvelles coques haut de gamme pour les téléphones mobiles.

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes représentant les recettes (en trait plein) et les coûts (en pointillés), en fonction du nombre de produits fabriqués exprimé en centaines d'unités.

On admet que la fabrication est comprise entre 0 et 700 unités.

Les recettes et les coûts sont exprimés en milliers d'euros.



Partie A lecture graphique

Répondre aux questions suivantes en vous aidant du graphique.

1. *Graphiquement, on trouve que pour avoir une recette de 14000 euros, il faut fabriquer environ 2,3 centaines d'objets donc* ***230 objets*** *ou 5,6 centaines, soit* ***560 objets****.*

2. *Le bénéfice est positif ou nul tant que la recette est supérieure ou égale aux coûts, donc on regarde les abscisses de points pour lesquels la courbe des recettes est au-dessus de la courbe des coûts.*
   On trouve que x doit être compris approximativement entre 0,25 et 5,75 ; il faut donc fabriquer ***entre 25 et 575 objets****.*

Partie B étude du bénéfice

On modélise :

- *les recettes par la fonction R définie sur [0 ; 7] par*

$$R(x) = -2x^3 + 4,5x^2 + 62x,$$

- *les coûts par la fonction C définie sur [0 ; 7] par*

$$C(x) = 20x + 10.$$

1. *399 produits fabriqués correspondent à* $x = 3$.
   $R(3) = 172,5$ et $C(3) = 70$.
   La recette correspondant à 300 objets est de ***172,5 milliers d'euros*** *et le coût est de* ***70 milliers d'euros***.

   Le bénéfice correspondant est donc de ***102,5 milliers d'euros***.

2. *On note B la fonction bénéfice.*

   Pour tout x, on a :

   $B(x) = R(x) - C(x) = (-2x^3 + 4,5x^2 + 62x) - (20x + 10) = -2x^3 + 4,5x^2 + 62x - 20x - 10 =$

   $B(x) = \boxed{-2x^3 + 4,5x^2 + 42x - 10}$.

3. $B'(x) = -2 \times 3x^2 + 4,5 \times 2x + 42 = \boxed{-6x^2 + 9x + 42}$.

4. *$B''(x)$ est un polynôme du second degré.*

   Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = -6$, $b = 9$ et $c = 42$.

   $\Delta = 9^2 - 4 \times (-6) \times 42 = 1\,089 = 33^2$.

   Les deux solutions de l'équation $B((x) = 0$ sont

   $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + 33}{-12} = \boxed{-2} \;\; ; \;\; x_2 = \frac{-b + -\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - 33}{-12} = \frac{42}{12} = \frac{7}{2} = \boxed{3,5}.$$

   $B'(x)$ est du signe du coefficient de x^2, donc de -6 (négatif) à l'extérieur de l'intervalle formé par les solutions de l'équation $B'(x) = 0$, donc pour $x > 3,5$ (car -2 n'appartient pas à l'intervalle d'étude).

   On en déduit le signe de $B'(x)$ et les variations de B.

x	0		$3,5$		7
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	-10	$\nearrow$	$106,375$	$\searrow$	$-181,5$

5. Le bénéfice est maximal pour **350 objets fabriqués** et vaut **106 375 euros.**

Exercice 2 (10 points)

1. (a) $u_0 = 75$, donc en 2016 $u_1 = u_0 \times 1,12 - 6 = 75 \times 1,12 - 684 - 6 = 78$.

   (b) D'une année sur l'autre l'augmentation est de 12 %, donc le nombre de contrats est multiplié par $1 + \dfrac{12}{100} = 1 + 0,12 = 1,12$ et ce nombre est diminué paar les 6 résiliations, donc

$$u_{n+1} = 1,12u_n - 6.$$

2. (a) Afficher n ou afficher $2015 + n$ année où le nombre de contrats dépassera 100.

   (b)

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7
Valeur de U	75	78	81	85	89	94	99	105

   (c) En 2022 le nombre de contrats sera de 105 : il faudra donc embaucher du personnel.

3. (a) On a pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 50 = 1,12u_n - 6 - 50 = 1,12u_n - 56 = 1,12\left(u_n - \dfrac{56}{1,12}\right) = 1,12\,(u_n - 50) = 1,12v_n$.

   L'égalité $v_{n+1} = 1,12v_n$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,12, de premier terme $v_0 = u_0 - 50 = 75 - 50 = 25$.

   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25 \times 1,12^n + 50$.

   On sait qu'alors pour tout entier naturel n : $v_n = 25 \times 1,12^n$.

   Or $v_n = u_n - 50 \iff u_n = v_n + 50$, donc finalement pour tout naturel n :

$$u_n = 50 + 25 \times 1,12^n.$$

   (c) $n = 7$.