Exercice 1 (10 points)

1.

$$U_{n+1} = 0,8U_n + 40 \text{ et } U_0 = 150$$

Vendre 20 % des vélos c'est en conserver 80 % soit multiplier le nombre initial par 0,8 et ensuite on en achète 40 :

$U_1 = 0,8U_0 + 40 = 0,8 \times 150 + 40 = 120 + 40 = 160$;

$U_2 = 0,8U_1 + 40 = 0,8 \times 160 + 40 = 128 + 40 = 168$.

2. (a) *D'après l'extrait de la feuille de calcul la suite semble être croissante.*

   (b) *La limite semble être 200.*

3. (a) *Pour tout naturel* n, $V_{n+1} = U_{n+1} - 200 = 0,8U_n + 40 - 200 = 0,8U_n - 160 = 0,8\,(U_n - 200) = 0,8V_n$.

   $V_{n+1} = 0,8V_n$ *vraie pour tout naturel* n *signifie que la suite* (V_n) *est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme* $V_0 = U_0 - 200 = 150 - 200 = -50$.

   (b) *On sait que tout naturel* n, $V_n = V_0 \times 0,8^n = -50 \times 0,8^n$.

   Or $V_n = U_n - 200 \iff U_n = V_n + 200 = 200 - 50 \times 0,8^n$.

   (c) *Comme* $0 < 0,8 < 1$, *on sait que* $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$, *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 200$ *(ce que l'on avait pressenti.)*

   (d) $U_{n+1} - U_n = 200 - 50 \times 0,8^{n+1} - (200 - 50 \times 0,8^n) = 50 \times 0,8^n - 50 \times 0,8^{n+1} = 50 \times 0,8^n(1 - 0,8) = 50 \times 0,2 \times 0,8^n = 100,8^n$.

   (e) *Puisque* $0,8^n > 0$, *le résultat précédent montre que la suite* (U_n) *est croissante.*

4. *On a montré que la suite* (U_n) *croît et a pour limite 200, donc pour tout naturel* n, $U_n < 200$.

   Si la municipalité implante 250 postes il y en aura 50 en trop puisque la société Vélibre louera au maximum 199 vélos mais ceci n'est pas idiot car il y a des endroits où les gens rendent leurs vélos plus qu'à d'autres et il faut en général plus d'emplacements que de vélos.

Exercice 2 (10 points)

1. *À l'aide de la calculatrice :*

   (a) *La fonction semble être décroissante sur]0 ; 4,2] puis croissante sur* $]4,2\ ;\ 6]$.

   (b) *On a* $C(4,2) = 0,635$ *soit 635 euros pour une production de 4,2 tonnes.*

   (c) *4000 euros correspondent à* $y = 4$. *Avec la fonction TRACE on a le curseur sur la courbe et on regarde s'il existe une abscisse pour laquelle on a* $y = 4$. *On trouve effectivement* $x = 0,5$. *On vérifie avec la calculatrice que*

   $C(0,5) = 4,03$.

2. *En dérivant le quotient :*

   $C'(x) = \dfrac{0,01\mathrm{e}^x \times x - 1\,(0,01\mathrm{e}^x + 2)}{x^2} = \dfrac{0,01x\mathrm{e}^x - 0,01\mathrm{e}^x - 2}{x^2}.$

3. $$f(x) = 0,01x\mathrm{e}^x - 0,01\mathrm{e}^x - 2.$$

   (a) *On a* $f'(x) = 0,01\mathrm{e}^x + 0,01x\mathrm{e}^x - 0,01\mathrm{e}^x = 0,01x\mathrm{e}^x$.

   (b) *Comme* $x > 0$ *et que pour tout* x, $\mathrm{e}^x > 0$, *on a* $f'(x) > 0$ *et la fonction* f *est croissante sur* $]0\ ;\ 6]$.

   (c) *La calculatrice donne :*
   $f(4,1) \approx -0,13$ *et* $f(4,2) \approx 0,1$ *donc* $4,1 < \alpha < 4,2$ *; puis*
   $f(4,15) \approx -0,002$ *et* $f(4,16) \approx 0,02$ *donc* $4,15 < \alpha < 4,16$.
   Donc au dixième près $\alpha \approx 4,2$.

   (d) *D'après la question précédente :*
   $f(x) < 0$ *sur* $]0\ ;\ \alpha[$ *et* $f(x) > 0$ *sur* $]\alpha\ ;\ 6]$.

4. *On a* $C'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ *; le signe de* $C'(x)$ *est donc celui de* $f(x)$ *trouvé à la question précédente, donc :*

   sur $]0\ ;\ \alpha]$ C *est décroissante et sur* $]\alpha\ ;\ 6]$, C *est croissante.*

   $C(\alpha)$ *est donc le minimum de la fonction* C *sur l'intervalle* $]0\ ;\ 6]$ *et* $C(\alpha) = 0,635$ *soit 635 euro. Ce minimum est obtenu pour une production de 4,2 tonnes.*