DS 9 spécialité maths première 9 mai 2023 Durée : 2 heures

Exercice 1 (5 points)

Soit la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 150$ *et, pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 45$.

1. $u_1 = 0,8u_0 + 45 = 0,8 \times 150 + 45 = 165$; $u_2 = 0,8u_1 + 45 = 0,8 \times 165 + 45 = 177$

2. *Voici deux propositions d'algorithmes :*

Algorithme 1	Algorithme 2
Variables :	***Variables :***
N *est un entier naturel*	N *est un entier naturel*
U *est un nombre réel*	U *est un nombre réel*
Initialisation:	***Initialisation:***
U *prend la valeur 150*	U *prend la valeur 150*
N *prend la valeur 0*	N *prend la valeur 0*
Traitement :	***Traitement :***
Tant que $U \geqslant 220$	*Tant que* $U < 220$
U *prend la valeur* $0,8 \times U + 45$	U *prend la valeur* $0,8 \times U + 45$
N *prend la valeur* $N + 1$	N *prend la valeur* $N + 1$
Fin Tant que	*Fin Tant que*
Sortie :	***Sortie :***
Afficher N	*Afficher* N

   (a) *Un seul de ces algorithmes permet de calculer puis d'afficher le plus petit entier naturel* n *tel que* $u_n \geqslant 220$.

   Dans l'algorithme 1, la condition pour entrer dans la boucle est Tant que $U \geq 200$; *la valeur de* U *est initialisée à 150 qui est inférieur à 220 donc on n'entre jamais dans la boucle Tant que.*

   Le bon algorithme est le 2.

   (b) *On calcule les premiers termes de la suite* (u_n) *à la calculatrice et on trouve:* $u_{12} \approx 219,8$ *et* $u_{13} \approx 220,9$ *donc l'algorithme 2 affiche 13 pour valeur de* n.

3. *On considère la suite* (v_n) *définie pour tout entier naturel* n *par :* $v_n = u_n - 225$; *donc* $u_n = v_n + 225$.

   (a)
   - $v_{n+1} = u_{n+1} - 225 = 0,8u_n + 45 - 225 = 0,8\,(v_n + 225) - 180 = 0,8v_n + 180 - 180 = 0,8v_n$
   - $v_0 = u_0 - 225 = 150 - 225 = -75$

   Donc la suite (v_n) *est géométrique de raison* $q = 0,8$ *et de premier terme* $v_0 = -75$.

   (b) *La suite* (v_n) *est géométrique de raison* $q = 0,8$ *et de premier terme* $v_0 = -75$ *donc, pour tout* n, $v_n = v_0 \times q^n = -75 \times 0,8^n$.

   On a vu que $u_n = v_n + 225$ *donc, pour tout* n, $u_n = 225 - 75 \times 0,8^n$.

4. *Une petite ville de province organise chaque année une course à pied dans les rues de son centre. En 2015, le nombre de participants à cette course était de* 150.

   On fait l'hypothèse que d'une année sur l'autre :

- *20 % des participants ne reviennent pas l'année suivante;*
- *45 nouveaux participants s'inscrivent à la course.*

La petite taille des ruelles du centre historique de la ville oblige les organisateurs à limiter le nombre de participants à 250.

D'une année n à une année $n+1$, 20 % des participants ne reviennent pas donc 80 % reviennent et de plus, 45 nouveaux participants s'inscrivent chaque année; on multipliera donc le nombre de participants de l'année n par 0,8 et on ajoutera 45 pour obtenir le nombre de participants de l'année $n+1$.

Le nombre de participants l'année 2015 est de 150 donc le nombre de participants peut être modélisé par la suite (u_n) précédemment définie où u_n représente le nombre de participants l'année $2015+n$.

Pour l'année $2015+n$, le nombre de participants est donc $u_n = 225 - 75 \times 0,8^n$.

Pour tout n, $225 - 75 \times 0,8^n < 225$ donc le nombre de 250 participants ne sera jamais atteint; il n'y aura donc pas lieu de refuser des inscriptions dans les années à venir.

Exercice 2 (5 points)

Pour l'année scolaire, un professeur de mathématiques propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : Approfondissement ou Ouverture culturelle .

Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés.

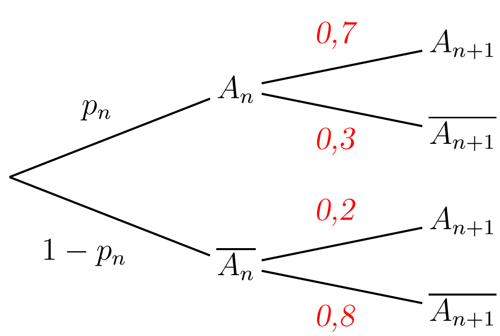
La première semaine, 20 % des élèves de la classe ont choisi Approfondissement et tous les autres ont choisi Ouverture culturelle , On admet que

- *20 % des élèves ayant choisi Ouverture culturelle une certaine semaine s'inscrivent en Approfondissement la semaine suivante ;*
- *30 % des élèves ayant choisi Approfondissement une certaine semaine s'inscrivent en Ouverture culturelle la semaine suivante.*

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines. Chaque semaine, on interroge au hasard un élève de la classe.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'évènement l'élève a choisi Approfondissement la n-ième semaine et p_n la probabilité de l'évènement A_n. On a alors $p_1 = 0,2$.

1. *On complète l'arbre:*



2. *D'après la formule des probabilités totales:*

   $p_{n+1} = p\left(A_{n+1}\right) = p\left(A_{n+1} \cap A_n\right) + p\left(A_{n+1} \cap \overline{A_n}\right) = 0,7p_n + 0,2\left(1 - p_n\right) = 0,5p_n + 0,2$

3. *On considère la suite* (u_n) *définie pour tout entier naturel* n *non nul par:* $u_n = p_n - 0,4$ *; donc* $p_n = u_n + 0,4$.

   (a)
   - $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,4 = 0,5p_n + 0,2 - 0,4 = 0,5\left(u_n + 0,4\right) - 0,2 = 0,5u_n + 0,2 - 0,2 = 0,5u_n$
   - $u_1 = p_1 - 0,4 = 0,2 - 0,4 = -0,2$

   Donc la suite (u_n) *est géométrique de raison* $q = 0,5$ *et de premier terme* $u_1 = -0,2$.

   (b) *On en déduit que pour tout entier* $n \geq 1$, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0,2 \times 0,5^{n-1}$.

   Comme $p_n = u_n + 0,4$, *alors* $p_n = 0,4 - 0,2 \times 0,5^{n-1}$ *pour tout entier* $n \geq 1$.

   (c) *La suite* (u_n) *est géométrique de raison* $q = 0,5$ *et* $-1 < q < 1$ *donc la suite* (u_n) *a pour limite 0.*

   On en déduit que la suite (p_n) *a pour limite* $0,4$ *et donc que le nombre d'élèves choisissant Approfondissement tend vers 40 %.*

4. *On considère l'algorithme suivant :*

Variables	*I et N sont des entiers naturels strictement supérieurs à 1* *P est un nombre réel*
Entrée	*Saisir N*
Initialisation	*P prend la valeur* $0,2$
Traitement	*Pour I allant de 2 à N :* *P prend la valeur* $0,5P + 0,2$ *Fin Pour*
Sortie	*Afficher P*

   (a) *On fait tourner l'algorithme pour* $N = 5$*; on obtient:*

N	2	3	4	5
P	*0,3*	*0,35*	*0,375*	*0,387 5*

   Il s'affiche donc 0,387 5 à la fin de l'exécution de l'algorithme.

   (b) *On modifie l'algorithme afin qu'il affiche le numéro de la première semaine pour laquelle le pourcentage des élèves de la classe ayant choisi Approfondissement dépasse* $39,9$*:*

Variables	I et N sont des entiers naturels strictement supérieurs à 1 P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur $0,2$
	N prend la valeur 1
Traitement	Tant que $P \leq 0,399$ P prend la valeur $0,5P + 0,2$ N prend la valeur $N + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher N

Exercice 3 (5 points)
Partie A

1. *Au point d'abscisse 5 la tangente à $\mathcal{C}_f$ est horizontale, $f'(5) = 0$.*
   Au point d'abscisse 0 la tangente à $\mathcal{C}_f$ est la droite (AB), $f'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{10}{2} = 5$.

2. $y = 5x$

Partie B

1. *f est dérivable sur [0 ; 18] en tant que produit de fonctions dérivables :*

   $f'(x) = 5 \times e^{-0,2x} + 5x \times \underbrace{e^{-0,2x}}_{e^{u(x)}} \overbrace{\times(-0,2)}^{\times u'(x)} = 5e^{-0,2x} - xe^{-0,2x} = (5 - x)e^{-0,2x}$.

2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^{-0,2x} > 0$, le signe ne dépend donc que de : $5 - x$. On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f.*

x	0		5		18
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{25}{e}$	$\searrow$	$90e^{3,6}$

3. *D'après le tableau de variations, au bout de 5 jours le nombre maximal de jouets est atteint est vaut :*

   $f(5) \approx 9,197$ milliers. Cela fait 9 197 jouets.

Exercice 4 (5 points)
Dans un repère orthonormal , on donne les points A(2;7) , B(6;3) et C(1;-2) .

1. *Montrer que le triangle ABC est rectangle en B*

   $\overrightarrow{AB}(4;-4)$

   $\overrightarrow{BC}(-5;-5)$

   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

   Donc les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires et le triangle ABC est bien rectangle en B

2. *Calculer l'aire du triangle ABC*

   $$Aire(ABC)=\frac{AB\times BC}{2}=\frac{\sqrt{32}\times\sqrt{50}}{2}=\frac{4\sqrt{2}\times 5\sqrt{2}}{2}=20$$

3. *Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC) . Déterminer BH*

   $$Aire(ABC)=\frac{AC\times BH}{2}=20\iff BH=\frac{40}{\sqrt{82}}=\frac{20\sqrt{82}}{41}$$

4. *On admet que l'équation de la droite (AC) est* $9x-y-11=0$ *. Déterminer les coordonnées de H .*

   Soit H(x;y) .

   Un vecteur normal de (AC) a pour coordonnées (9;-1) et $\overrightarrow{BH}$ *lui est colinéaire donc* $\overrightarrow{BH}(9k;-k)$

   Or : $\overrightarrow{BH}(x-6;y-3)$

   Donc : $x=9k+6$ *et* $y=-k+3$

   De plus , H appartient à (AC) donc ses coordonnées vérifient l'équation de (AC) d'où :

   $$9(9k+6)-(-k+3)-11=0\iff 82k+40=0\iff k=-\frac{20}{41}$$

   Et donc $H(\frac{66}{41};\frac{123}{41})$