

**Exercice 1 (10 points )**

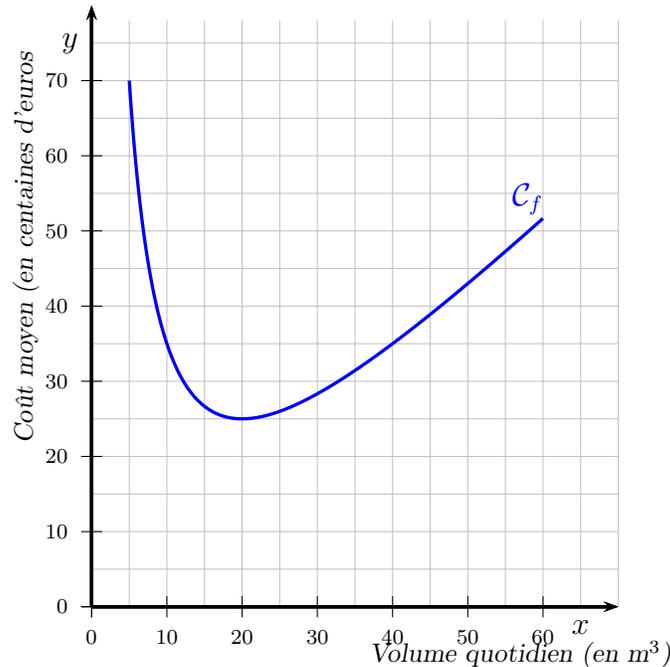
Une entreprise fabrique un engrais biologique liquide.

Chaque jour, le volume d'engrais liquide fabriqué est compris entre  $5\text{ m}^3$  et  $60\text{ m}^3$ .

Le coût moyen quotidien de production (exprimé en centaine d'euros) de cet engrais est modélisé par la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[5 ; 60]$  par :

$$f(x) = x - 15 + \frac{400}{x}$$

où  $x$  est le volume quotidien d'engrais fabriqué, exprimé en  $\text{m}^3$ . La représentation graphique  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  est donnée dans le repère ci-dessous :



**PARTIE A**

1. Quel est le coût moyen quotidien pour la production de  $50\text{ m}^3$  d'engrais ?
2. Quels volumes d'engrais faut-il fabriquer pour avoir un coût moyen quotidien de production inférieur ou égal à 3500 euros ?

**PARTIE B**

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[5 ; 60]$ . On note  $f'$  sa fonction dérivée.

1. Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[5 ; 60]$ ,  $f'(x) = \frac{x^2 - 400}{x^2}$ .
2. Étudier le signe de  $x^2 - 400$ , pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[5 ; 60]$ .

3. En déduire les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[5 ; 60]$ .
4. Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen quotidien de production est-il minimal ? Quel est ce coût moyen minimal ?

**Exercice 2 (10 points)**

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de la pollution. Leur but est de soigner puis relâcher ces oiseaux une fois guéris.

Le centre ouvre ses portes le 1er janvier 2013 avec 115 oiseaux.

Les spécialistes prévoient que 40 % des oiseaux présents dans le centre au 1er janvier d'une année restent présents le 1er janvier suivant et que 120 oiseaux nouveaux sont accueillis dans le centre chaque année.

On s'intéresse au nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1er janvier des années suivantes.

La situation peut être modélisée par une suite  $(u_n)$  admettant pour premier terme  $u_0 = 115$ , le terme  $u_n$  donnant une estimation du nombre d'oiseaux l'année 2013 +  $n$ .

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ . Avec quelle précision convient-il de donner ces résultats ?
2. Les spécialistes déterminent le nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1er janvier de chaque année à l'aide d'un algorithme.
  - (a) Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul l'**algorithme 3** permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1er janvier de l'année 2013 +  $n$ .

Expliquer pourquoi les deux premiers algorithmes ne donnent pas le résultat attendu.

**Variables :**  
 $U$  est un nombre réel  
 $i$  et  $N$  sont des nombres entiers  
**Début**  
 Saisir une valeur pour  $N$   
 Affecter 115 à  $U$   
 Pour  $i$  de 1 à  $N$  faire  
     | Affecter  $0,6 \times U + 120$   
     à  $U$   
 Fin Pour  
 Afficher  $U$   
**Fin**

algorithme 1

**Variables :**  
 $U$  est un nombre réel  
 $i$  et  $N$  sont des nombres entiers  
**Début**  
 Saisir une valeur pour  $N$   
 Pour  $i$  de 1 à  $N$  faire  
     | Affecter 115 à  $U$   
     | Affecter  $0,4 \times U + 115$   
     à  $U$   
 Fin Pour  
 Afficher  $U$   
**Fin**

algorithme 2

**Variables :**  
 $U$  est un nombre réel  
 $i$  et  $N$  sont des nombres entiers  
**Début**  
 Saisir une valeur pour  $N$   
 Affecter 115 à  $U$   
 Pour  $i$  de 1 à  $N$  faire  
     | Affecter  $0,4 \times U + 120$   
     à  $U$   
 Fin Pour  
 Afficher  $U$   
**Fin**

algorithme 3

- (b) Donner, pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
3. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = u_n - 200$ .
  - (a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,4. Préciser  $v_0$ .
  - (b) Exprimer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - (c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 200 - 85 \times 0,4^n$ .

(d) La capacité d'accueil du centre est de 200 oiseaux. Est-ce suffisant ? Justifier la réponse.

4. Chaque année, le centre touche une subvention de 20 euros par oiseau présent au 1er janvier.

Calculer le montant total des subventions perçues par le centre entre le 1er janvier 2013 et le 31 décembre 2018 si l'on suppose que l'évolution du nombre d'oiseaux se poursuit selon les mêmes modalités durant cette période.