DS 5 spécialité maths première 16 janvier 2024

Exercice 1 (8 points)

Une retenue d'eau artificielle contient 100 000 m^3 *d'eau le 1er juillet 2013 au matin.*

La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4 % *du volume total de l'eau par jour. De plus, chaque soir, on doit libérer de la retenue* 500 m^3 *pour l'irrigation des cultures aux alentours.*

Cette situation peut être modélisée par une suite (u_n).

Le premier juillet 2013 au matin, le volume d'eau en m^3 *est* $u_0 = 100\,000$.

Pour tout entier naturel n *supérieur à 0,* u_n *désigne le volume d'eau en* m^3 *au matin du* n*-ième jour qui suit le 1er juillet 2013.*

1. (a) *Justifier que le volume d'eau* u_1 *au matin du 2 juillet 2013 est égal à 95 500* m^3.

   (b) *Déterminer le volume d'eau* u_2, *au matin du 3 juillet 2013.*

   (c) *Montrer que, pour tout entier naturel* n, *on a* $u_{n+1} = 0,96u_n - 500$.

2. *Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.*

L1	***Variables :***	u *est un nombre réel*
L2		n*est un entier naturel*
L3	***Traitement :***	*Affecter à* u *la valeur 100 000*
L4		*Affecter à* n *la valeur 0*
L5		*Tant que* $u > 0$
L6		*Affecter à* n *la valeur* ...
L7		*Affecter à* u *la valeur* ...
L8		*Fin Tant que*
L9	***Sortie :***	*Afficher* ...

3. *On considère la suite* (v_n) *définie pour tout entier naturel* n *par* $v_n = u_n + 12\,500$.

   (a) *Montrer que la suite* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $0,96$. *Préciser son premier terme.*

   (b) *Exprimer* v_n *en fonction de* n.

   (c) *En déduire que, pour tout entier naturel* n, $u_n = 112\,500 \times 0,96^n - 12\,500$.

4. (a) *Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation* $112\,500 \times 0,96^n - 12\,500 \leqslant 0$.

   (b) *Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.*

Exercice 2 (8 points)

Une entreprise fabrique et commercialise un alliage métallique. Chaque mois, elle peut produire jusqu'à 10 tonnes de cet alliage et en vend toute la production.

1. *Le coût total de production de x tonnes de l'alliage, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C dont l'expression est*

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 135$$

où x appartient à l'intervalle [0 ; 10].

Après une étude de marché, le prix de vente de l'alliage produit a été fixé à 60 milliers d'euros la tonne.

   (a) *Calculer la recette pour la vente de 5 tonnes d'alliage.*

   (b) *On note R la fonction qui modélise la recette, exprimée en milliers d'euros, pour x tonnes vendues.*
   Donner une expression de $R(x)$ en fonction de x.

2. *On note B la fonction qui modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, sur l'intervalle [0 ; 10].*

   (a) *Montrer que l'expression de $B(x)$, lorsque x appartient à l'intervalle [0 ; 10] est :*

$$B(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 135.$$

   (b) *On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Calculer $B'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 10].*

   (c) *Étudier le signe de B' et en déduire les variations de B sur l'intervalle [0 ; 10].*

   (d) *Déterminer la quantité d'alliage à produire pour réaliser un bénéfice maximal.*

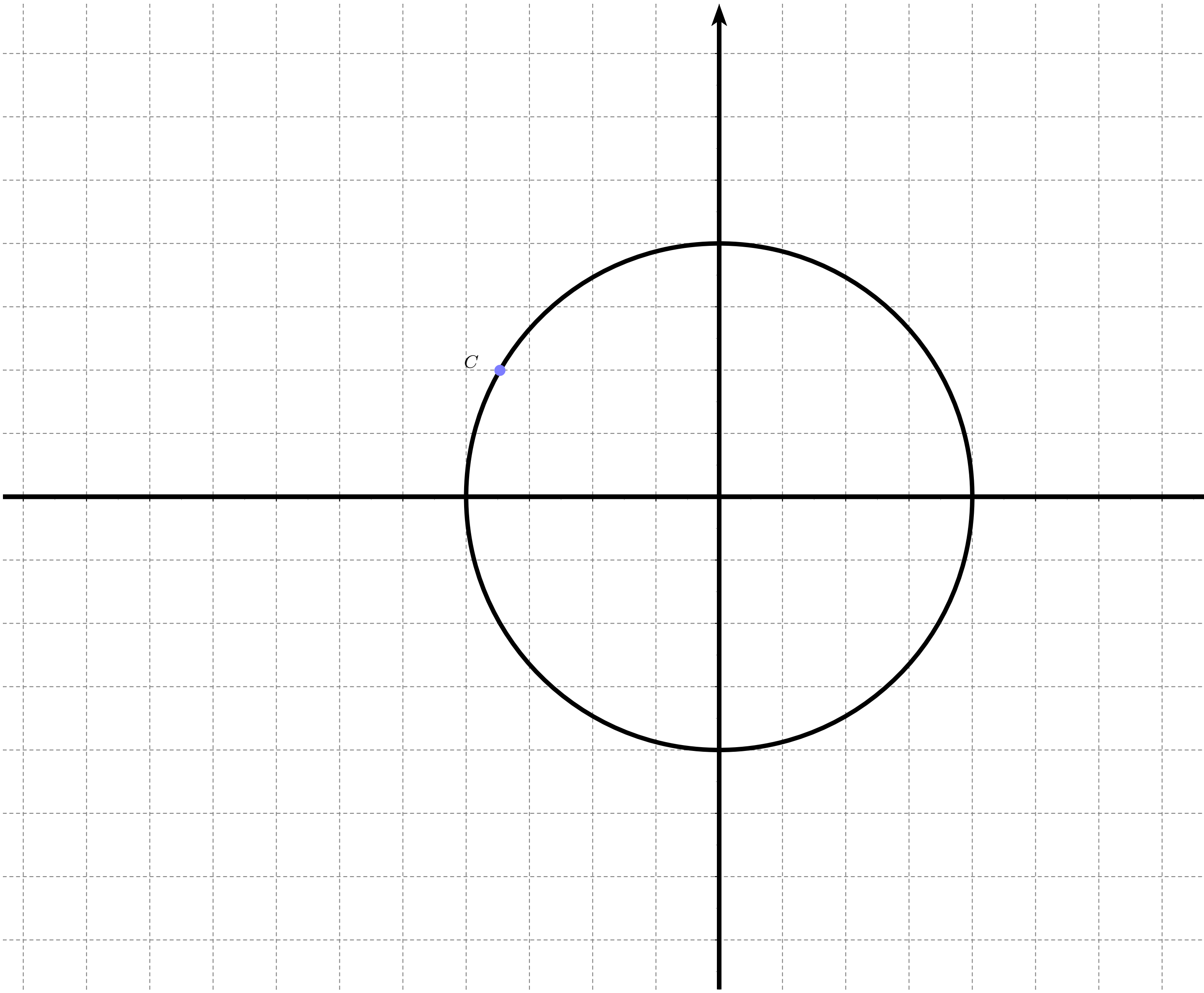
Exercice 3 (4 points)

1. *Placer le point A sur le cercle ci-dessous tel que* $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}) = \dfrac{5\pi}{4}$ *rad*

2. *Déterminer :* $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC})$

3. *Résoudre dans* $[0;2\pi[$ *:* $cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. *Résoudre dans* $[-\pi;\pi[$ *:* $sin x < \dfrac{1}{2}$


C