Exercice 1 (10 points)

Dans une ville, un service périscolaire comptabilise 150 élèves inscrits en septembre 2014. On admet que, chaque année, 80 % des élèves inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 40 nouveaux élèves inscrits. La capacité d'accueil du périscolaire est de 190 élèves maximum.

On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au périscolaire en septembre de l'année $2014 + n$, avec n un nombre entier naturel.

On a donc $u_0 = 150$.

1. *Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au périscolaire en septembre 2015.*
2. *Pour tout entier naturel n, justifier que $u_{n+1} = 0,8u_n + 40$.*
3. *On donne l'algorithme suivant :*

Initialisation
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 150

Traitement
Tant que $U \leqslant 190$
n prend la valeur $n + 1$
U prend la valeur $0,8U + 40$
Fin tant que

***Sortie** Afficher le nombre $2014 + n$*

(a) *Recopier et compléter le tableau suivant par autant de colonnes que nécessaire pour retranscrire l'exécution de l'algorithme. Arrondir les résultats au centième.*

Valeur de n	0	1	2	
Valeur de U	150			
Condition $U \leqslant 190$	vraie			

(b) *En déduire l'affichage obtenu en sortie de l'algorithme et interpréter ce résultat.*

4. *On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.*

(a) *Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.*

(b) *Pour tout entier naturel n, démontrer que $u_n = 200 - 50 \times 0,8^n$.*

(c) *Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :*

$$200 - 50 \times 0,8^n > 190.$$

(d) *À partir de quelle année la directrice du périscolaire sera-t-elle obligée de refuser des inscriptions faute de places disponibles ?*

Exercice 2 (10 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 10] par

$$f(x) = (2x - 5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20.$$

Partie A

1. *Montrer que, pour tout x de l'intervalle [0 ; 10], $f'(x) = (-2x + 7)\mathrm{e}^{-x+4}$.*
2. *En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle [0 ; 10].*

   Si nécessaire, arrondir au millième les valeurs présentes dans le tableau de variation.
3. *On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur [0 ; 10] ; déterminer un encadrement d'amplitude $0,01$ de α.*
4. *Tracer la courbe représentative de la fonction f sur [1;10] . On prendra 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées .*

Partie B

Une entreprise fabrique entre 0 et 1 000 objets par semaine.

Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets est modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10] par :

$$f(x) = (2x - 5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20.$$

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la partie A et en arrondissant les résultats à l'unité.

1. *Quel est le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum ?*

   Quel est ce bénéfice maximal en euros ?
2. *À partir de combien d'objets fabriqués et vendus l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice positif ?*