Exercice 1 (10 points)

A. Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par

$$\boldsymbol{g(x) = e^{x}(1-x)+1.}$$

1. *Étudier le sens de variation de g.*
2. *On admet que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0;+\infty[$; on note α cette solution.Donner une valeur approchée au centième de α*
3. *Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[-2;+\infty[$*

B. Étude de la fonction f définie sur $[-2;+\infty[$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{e^{x}+1}+2.}$$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$; unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. *Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite (d) d'équation $y = x+2$*
2. (a) *Calculer f'(x).*
   (b) *Montrer que $f(\alpha) = \alpha+1$*
   (c) *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*
3. *Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d dans le repère .*

Exercice 2 (10 points)

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.

On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$.

Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.

Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

- *T_n : le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage.*
- *P_n : le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage.*

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

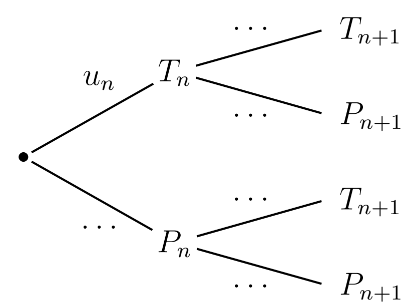
$$u_n = p\left(T_n\right)$$

où $p\left(T_n\right)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1. (a) *Donner les valeurs des probabilités* $p(T_1)$, $p(P_1)$ *et des probabilités conditionnelles* $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.

   (b) *Montrer que* $p(T_2) = \dfrac{1}{4}$.

   (c) *Recopier et compléter l'arbre suivant :*



   (d) *Démontrer que pour tout entier* $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.

   (e) *À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite* (u_n).

   (f) *Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche le n-ème terme de la suite* (u_n) *:*

```
def termes(...):
    U=......
    for k in range(.....,.....):
        U = .........
    return(...........)
```

2. *On considère la suite* (v_n) *définie pour tout entier naturel* $n \geqslant 1$ *par :*

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

   (a) *Démontrer que la suite* (v_n) *est géométrique de raison* $\dfrac{1}{10}$. *Préciser son premier terme.*

   (b) *Exprimer* v_n *en fonction de* n. *En déduire l'expression de* u_n *en fonction de* n.

   (c) *Calculer la limite de la suite* (u_n). *Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en* ***1. e.*** *?*