DS 9 spécialité maths première 14 mai 2024 Durée : 2 heures

Exercice 1 (5 points)

Un infographiste simule sur ordinateur la croissance d'un bambou. Il prend pour modèle un bambou d'une taille initiale de 1 m dont la taille augmente d'un mois sur l'autre de 5 % auxquels s'ajoutent 20 cm.

Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n la taille, exprimée en centimètre, qu'aurait le bambou à la fin du n-ième mois, et $u_0 = 100$.

1. *Calculer u_1 et u_2.*
2. *Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,05 \times u_n + 20$.*
3. *Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n + 400$.*
   (a) *Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.*
   (b) *Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.*
   (c) *En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 500 \times 1,05^n - 400$.*
   (d) *Calculer la taille du bambou, au centimètre près, à la fin du 7ème mois.*
4. *On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel n est un entier naturel et u est un nombre réel.*

```
u ← 100
n ← 0
Tant que u < 200 faire
    u ← 1,05 × u + 20
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

   (a) *Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour retranscrire l'exécution de l'algorithme.*

Test $u < 200$		vrai		...
Valeur de u	100			...
Valeur de n	0			...

   (b) *Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ? Interpréter le résultat au regard de la situation étudiée dans cet exercice.*
   (c) *Modifier les lignes nécessaires dans l'algorithme pour déterminer le nombre de mois qu'il faudrait à un bambou de 50 cm pour atteindre ou dépasser 10 m.*

Exercice 2 (5 points)

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- *à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est* $0,9$;
- *si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est* $0,95$;
- *si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est* $0,2$.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n *non nul, on note* R_n *l'évènement le client rapporte la bouteille de son panier de la* n*-ième semaine.*

1. (a) *Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements* R_1 *et* R_2.

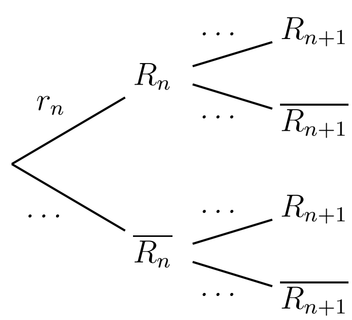
   (b) *Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.*

   (c) *Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à* $0,875$.

   (d) *Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?*
   On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2. *Pour tout entier naturel* n *non nul, on note* r_n *la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la* n*-ième semaine. On a alors* $r_n = p(R_n)$.

   (a) *Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :*



   (b) *Justifier que pour tout entier naturel* n *non nul,* $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

   (c) i. *On pose* $u_n = r_n - \dfrac{4}{5}$. *Montrer que* (u_n) *est une suite géométrique .*

   ii. *Démontrer que pour tout entier naturel* n *non nul,* $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.

   iii. *Calculer la limite de la suite* (r_n). *Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice*

Exercice 3 (5 points)

*Un ébéniste décide de refaire les accoudoirs d'un fauteuil (ébauche du fauteuil en **annexe 1**). On modélise l'accoudoir à l'aide de la fonction f définie sur $\left[0~;~60\right]$ par;*

$$f(x) = 70 + (14x + 42)\ e^{-\frac{x}{5}}.$$

*La courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$ est donnée en **annexe 2**.*

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $\left[0~;~60\right]$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

Dans toute cette partie, les réponses sont obtenues graphiquement à partir de la courbe représentative de f donnée en **annexe 2**.

On admet que A(7;104,5)

1. *Déterminer une valeur approchée de $f(0)$ et $f(60)$.*
2. *Déterminer $f'(7)$.*
3. *On considère la surface située entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 60$.*
   (a) *Hachurer la surface décrite ci-dessus sur l'**annexe 2**.*
   (b) *L'ébéniste estime l'aire de cette surface à 3 800 unités d'aire. Cette estimation est-elle correcte?*

Partie B

1. *Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[0~;~60\right]$ on a:*

$$f'(x) = \frac{1}{5}\,(-14x + 28)\ e^{-\frac{x}{5}}.$$

2. (a) *Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $\left[0~;~60\right]$.*
   (b) *Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[0~;~60\right]$.*
   On arrondira à l'unité près les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variations.
3. *Déterminer $f''(x)$*

Partie C

L'ébéniste découpe 2 accoudoirs identiques sur le modèle de la surface hachurée de l'annexe 2 en choisissant comme unité le cm.

*Il souhaite vernir les deux faces de chaque accoudoir (**annexe 1**) ainsi que le dossier du fauteuil dont l'aire est égale à 5 400 cm^2. Or il lui reste le quart d'un petit pot de vernis pouvant couvrir 10 m^2. Aura-t-il suffisamment de vernis?*

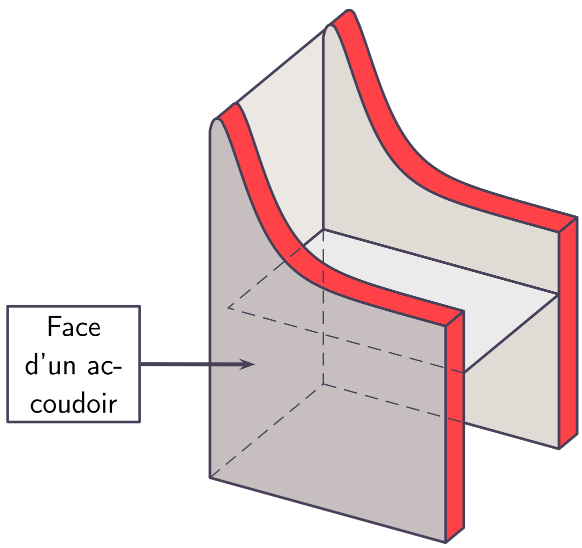
Exercice 4 (5 points)

Dans un repère orthonormé , on donne les points A(1;4) , B(7;4) , C(4;9) .

1. *Faire une figure à compléter au fur et à mesure de l'exercice .*
2. *Déterminer une équation de la hauteur du triangle ABC issue de C*
3. *Déterminer une équation de la hauteur du triangle ABC issue de A*
4. *Déterminer les coordonnées de l'orthocentre de ABC*
5. *Déterminer les coordonnées de H le projeté orthogonal de A sur (CB)*
6. *On définit le cercle de centre E et de rayon R par l'équation :* $x^2-20x+y^2-4y+95=0$ *. Déterminer les coordonnées de E et la valeur de R .*
7. *Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle précédent et de la droite (AB) .*

Annexes: à rendre avec la copie

Exercice 3
Annexe 1: ébauche du fauteuil



Annexe 2