Exercice 1 (10 points)

Pour jouer sur internet à un certain jeu la souscription d'un abonnement annuel est obligatoire.

À partir d'un sondage, on prévoit que :

- *80 % des abonnés renouvellent chaque année leur abonnement,*
- *le nombre de nouveaux abonnés sera de 20 000 tous les ans.*

1. *Au premier janvier 2012, on comptait 50 000 abonnés à ce jeu en ligne.*

   Selon ce modèle, justifier qu'au premier janvier 2013 le nombre d'abonnés sera égal à 60 000.

   $50000 \times \dfrac{80}{100} + 20000 = 60000$

2. (a) *Justifier que le nombre d'abonnés au premier janvier de l'année* $2012 + n$ *est modélisé par la suite* (a_n) *définie par:*

   $$\begin{cases} a_0 & = & 50\,000 \\ a_{n+1} & = & 0,8a_n + 20\,000 \quad \textit{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

   En 2012 , il y a 50000 abonnés donc $a_0 = 50000$

   Pour passer d'une année à l'autre , on garde 80% des abonnés de l'année précédente donc $0,8a_n$ *et doit ajouter les 20000 nouveaux abonnés .*

   (b) *Calculer* a_2 *et* a_3.

   $a_2 = 0,8a_1 + 20000 = 0,8 \times 60000 + 20000 = 68000$

   $a_3 = 0,8a_2 + 20000 = 0,8 \times 68000 + 20000 = 74400$

   (c) *Sur le graphique situé en annexe, à rendre avec la copie, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormal les droites* D *d'équation* $y = x$ *et* Δ *d'équation* $y = 0,8x + 20\,000$.

   Sur l'axe des abscisses, représenter a_0 *puis construire* a_1, a_2, a_3, a_4 *en utilisant les représentations graphiques des deux droites précédentes.*

   Laisser apparents les traits de construction.

   (d) *En s'appuyant sur une observation graphique, émettre une conjecture sur la limite de la suite* (a_n).

   Il semble que la suite tende vers 100000

3. *On définit la suite* (u_n) *par* $u_n = a_n - 100000$

   (a) *Démontrer que* (u_n) *est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme .*

   $u_{n+1} = a_{n+1} - 100000 = 0,8a_n + 20000 - 100000 = 0,8a_n - 80000 = 0,8(u_n + 100000) - 80000 = 0,8u_n$

   Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0,8$

   La suite (u_n) *est donc une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme* $u_0 = 50000 - 100000 = -50000$

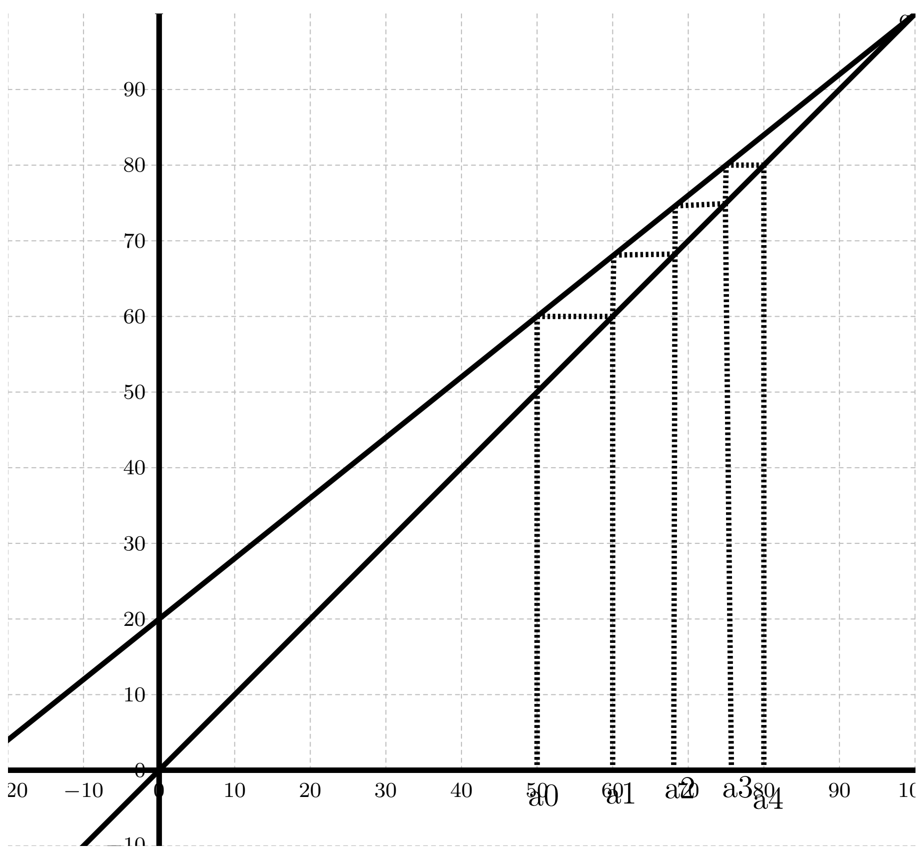
(b) *Déterminer l'expression de u_n en fonction de n*
$u_n = -50000 \times 0,8^n$

(c) *En déduire l'expression de a_n en fonction de n .*
$a_n = u_n + 100000 = -50000 \times 0,8^n + 100000$

(d) *Déterminer la limite de la suite (a_n).*
100000

(e) *Donner une estimation de l'année à partir de laquelle, au premier janvier, le nombre d'abonnés à ce jeu sera supérieur à 95 000.*
A l'aide de la calculatrice , on trouve : 2023 .

Annexe de l'exercice 2 (spécialité) à rendre avec la copie



Exercice 2 (10 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 12$

1. *Déterminer* $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24$

2. *Déterminer a , b et c tels que* $f'(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$
On a : $12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$
$12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

Par identification : $a = 12$, $c = -24$ *et donc* $b = -12$

$f'(x) = (x-1)(12x^2 - 12x - 24)$

3. *Résoudre* $f'(x) > 0$

   En étudiant le signe du polynôme $12x^2 - 12x - 24$: $\Delta = 1296$ *et* $x_1 = \dfrac{12-36}{24} = -1$ *et* $x_2 = \dfrac{12+36}{24} = 2$

   Et en utilisant un tableau de signes sans oublier $x - 1$ *, on obtient :*

   $x \in]-1;1[\cup]2;+\infty[$

4. *Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 .*

   $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

   donc $y = 24x + 12$

5. *Tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle [-2;3]ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0 .*


f
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
−5
−10
−3
−2
−1
0
1
2
3
4