DS 4 spécialité maths première 6 décembre 2023

Exercice 1 (10 points)

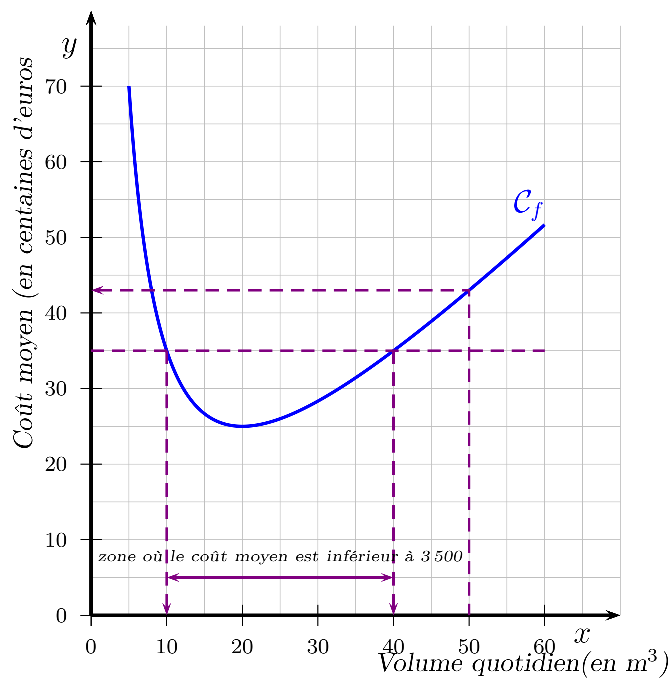
Une entreprise fabrique un engrais biologique liquide.

Chaque jour, le volume d'engrais liquide fabriqué est compris entre $5\,\mathrm{m}^3$ *et* $60\,\mathrm{m}^3$.

Le coût moyen quotidien de production (exprimé en centaine d'euros) de cet engrais est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle [5 ; 60] par :

$$f(x) = x - 15 + \frac{400}{x}$$

où x est le volume quotidien d'engrais fabriqué, exprimé en m^3. *La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère ci-dessous :*



PARTIE A

1. *Le coût moyen quotidien pour la production de* $50\,\mathrm{m}^3$ *d'engrais est* $f(50)$.

   $f(50) = 50 - 15 + \dfrac{400}{50} = 35 + 8 = 43$, *soit 4 300 euros*

   On lit également sur la représentation graphique de f que l'image de 50 est environ 43 avec la même conclusion.

2. *Quels volumes d'engrais faut-il fabriquer pour avoir un coût moyen quotidien de production inférieur ou égal à 3 500 euros ? Pour ce faire, résolvons* $f(x) \leqslant 35$.

   $x - 15 + \dfrac{400}{x} \leqslant 35$; $x - 50 + \dfrac{400}{x} \leqslant 0$; $\dfrac{x^2 + 50x + 400}{x} \leqslant 0$ *et enfin* $x^2 + 50x + 400 \leqslant 0$, *car* $x > 0$.

   $x^2 - 50x + 400$ *est un trinôme du second degré. Calculons le discriminant.* $\Delta = 50^2 - 4 \times 1 \times 400 = 900$.

$\Delta > 0$ le trinôme admet deux racines

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *soit* $x_1 = \dfrac{50-\sqrt{900}}{2} = 10$. $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *soit* $x_2 = \dfrac{50+\sqrt{900}}{2} = 40$.

Il faut donc résoudre $(x-10)(x-40) \leqslant 0$.

On sait que $(x-10)(x-40) \geqslant 0$, sauf sur l'intervalle [10 ; 40]

L'ensemble des solutions de l'inéquation sur l'intervalle [5 ; 60] est [10 ; 40].

L'entreprise, pour avoir des coûts moyens inférieurs à 3 500 euros, doit fabriquer entre 10 et 40 m^3 d'engrais.

PARTIE B

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle [5 ; 60]. On note f' sa fonction dérivée.

1. *Montrons que, pour tout x appartenant à l'intervalle [5 ; 60], $f'(x) = \dfrac{x^2-400}{x^2}$.*

   $f'(x) = 1 - \dfrac{400}{x^2} = \dfrac{x^2-400}{x^2}$

2. *Étudions le signe de x^2-400, pour tout x appartenant à l'intervalle [5 ; 60].*

   $x^2-400 = x^2-20^2 = (x+20)(x-20)$

   Sur $[5\ ;\ 60]\quad x+20>0$

   Sur $\mathbb{R}$, $x-20>0 \iff x>20$, *par conséquent sur* $[5\ ;\ 20[$ $x-20<0$ *et sur* $]20\ ;\ 60]$ $x+20>0$.

   Il en résulte aussi que sur $[5\ ;\ 20[$ $x^2-400<0$ *et sur* $]20\ ;\ 60]$ $x^2-400>0$.

3. *Étudions les variations de la fonction f sur l'intervalle [5 ; 60].*

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x)<0$ alors f est strictement décroissante sur I.

   Sur $[5\ ;\ 20[$, $f'(x)<0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x)>0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.

   Sur $]20\ ;\ 60]$, $f'(x)>0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

4. *Le coût moyen quotidien de production est minimal pour un volume d'engrais fabriqué de 20 m^3.*

   Ce coût moyen minimal est égal à 2 500 euros.

Exercice 2 (10 points)

1. *On sait que $u_0 = 115$; sur ces 115 oiseaux, 40 % restent présents ce qui en fait $115 \times 0,40 = 46$. De plus, 120 nouveaux oiseaux sont accueillis en 2013 donc il y en aura au 1er janvier 2014: $u_1 = 46+120 = 166$.*

   De même au 1er janvier de l'année 2015, il y en aura $u_2 = 166 \times 0,4 + 120 \approx 186$.

   Il faut donner les résultats à l'unité près puisqu'il s'agit d'un nombre d'oiseaux.

2. (a) *Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul l'**algorithme 3** permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1er janvier de l'année $2013+n$.*

algorithme 1	algorithme 2	algorithme 3
Variables : U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers **Début** Saisir une valeur pour N Affecter 115 à U Pour i de 1 à N faire | Affecter $0,6\times U+120$ à U Fin Pour Afficher U **Fin**	**Variables :** U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers **Début** Saisir une valeur pour N Pour i de 1 à N faire | Affecter 115 à U | Affecter $0,4\times U+115$ à U Fin Pour Afficher U **Fin**	**Variables :** U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers **Début** Saisir une valeur pour N Affecter 115 à U Pour i de 1 à N faire | Affecter $0,4\times U+120$ à U Fin Pour Afficher U **Fin**

Dans ces trois algorithmes, la variable U contient le nombre d'oiseaux recueillis l'année $2013+i$, où i est un nombre entier compris entre 1 et N.

Dans l'algorithme 1, on multiplie le nombre d'oiseaux de l'année $2013+n$ par $0,6$ ce qui revient à en prendre $60\,\%$ alors qu'il faut en prendre $40\,\%$.

Dans l'algorithme 2, on multiplie le nombre d'oiseaux par le bon coefficient $0,4$ mais on ajoute chaque année 115 alors qu'il faut ajouter 120 oiseaux, comme le dit le texte.

De plus, dans cet algorithme, il ne faudrait pas mettre l'instruction "Affecter 115 à U" dans la boucle POUR, mais avant d'y entrer.

(b) *On peut dire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0,4\,u_n+120$ avec $u_0=115$.*

3. *On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-200$.*

(a) *Pour tout n, $v_n=u_n-200$ donc $u_n=v_n+200$.*

$v_{n+1}=u_{n+1}-200$; *or* $u_{n+1}=0,4\,u_n+120$, *donc*

$v_{n+1}=0,4\,u_n+120-200=0,4\,(v_n+200)-80=0,4\,v_n+80-80=0,4\,v_n$

$v_0=u_0-200=115-200=-85$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q=0,4$ et de premier terme $v_0=-85$.

(b) *On sait que l'expression d'une suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 et de raison q est: $v_n=v_0\times q^n$ pour tout entier n.*

Donc $v_n=-85\times 0,4^n$ pour tout entier n.

(c) *On a vu que, pour tout entier n, $u_n=v_n+200$; or $v_n=-85\times 0,4^n$, donc pour tout entier naturel n, $u_n=200-85\times 0,4^n$.*

(d) *L'estimation du nombre d'oiseaux l'année $2013+n$ est $200-85\times 0,4^n$.*

Le nombre $0,4^n$ est positif donc le nombre $200-85\times 0,4^n$ est toujours inférieur à 200.

Une capacité d'accueil de 200 oiseaux est donc suffisante pour ce centre.

4. *On cherche à calculer le nombre total d'oiseaux présents dans le centre entre le 1er janvier 2013 et le 31 décembre 2018, autrement dit pour* n *entier entre 0 et 5 puisque* $2018 = 2013 + 5$*; ce nombre est* $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$.

   On connaît u_0, u_1 *et* u_2*; il reste à calculer* u_3, u_4 *et* u_5*:*

   $$u_3 = 0,4 \times u_2 + 120 = 0,4 \times 186 + 120 \approx 194$$

   $$u_4 = 0,4 \times u_3 + 120 = 0,4 \times 194 + 120 \approx 198$$

   $$u_5 = 0,4 \times u_4 + 120 = 0,4 \times 198 + 120 \approx 199$$

   $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 \approx 115 + 166 + 186 + 194 + 198 + 199 = 1\,058$

   Entre le 1er janvier 2013 et le 31 décembre 2018, il y aura $1\,058$ *oiseaux présents au centre; chacun d'eux rapportant 20 euros, le montant total de la subvention touchée sera de* $1\,058 \times 20 = 21\,160$ *euros.*