DS 5 spécialité maths première 16 janvier 2024

Exercice 1 (8 points)

La situation peut être modélisée par une suite (u_n).

Le premier juillet 2013 au matin, le volume d'eau en m^3 *est* $u_0 = 100\,000$.

Pour tout entier naturel n *supérieur à 0,* u_n *désigne le volume d'eau en* m^3 *au matin du* n*-ième jour qui suit le 1er juillet 2013.*

1. (a) *Volume d'eau* u_1 *au matin du 2 juillet 2013 :*

$$u_0 = 100\,000 \xrightarrow{-4\%} 0,96 \times 100\,000 = 96\,000 \xrightarrow{-500} 96\,000 - 500 = 95\,500 = u_1$$

   (b) *Volume d'eau* u_2*, au matin du 3 juillet 2013:*

$$u_1 = 95\,500 \xrightarrow{-4\%} 0,96 \times 95\,500 = 91\,680 \xrightarrow{-500} 91\,680 - 500 = 91\,180 = u_2$$

   (c) *Pour tout entier naturel* n

$$u_n \xrightarrow{-4\%} 0,96 \times u_n \xrightarrow{-500} 0,96u_n - 500 = u_{n+1}$$

   Ainsi, $u_{n+1} = 0,96u_n - 500$.

2. *Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes* `L6`, `L7` *et* `L9` *de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.*

L1	***Variables :***	u *est un nombre réel*
L2		n *est un entier naturel*
L3	***Traitement :***	*Affecter à* u *la valeur 100 000*
L4		*Affecter à* n *la valeur 0*
L5		*Tant que* $u > 0$
L6		*Affecter à* n *la valeur* $n+1$
L7		*Affecter à* u *la valeur* $0,96 * u - 500$
L8		*Fin Tant que*
L9	**Sortie :**	*Afficher* n

3. *On considère la suite* (v_n) *définie pour tout entier naturel* n *par* $v_n = u_n + 12\,500 \iff u_n = v_n - 12\,500$.

   (a) *La suite* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $0,96$*:*

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 12\,500 = 0,96u_n - 500 + 12\,500 = 0,96u_n + 12\,000 = 0,96\,(u_n + 12\,500) = 0,96 \times v_n$$

$$v_0 = u_0 + 12\,500 = 100\,000 + 12\,500 = 112\,500$$

(b) *Ainsi:* $v_n = 112\,500 \times (0,96)^n$.

(c) *Donc:*

$$v_n = u_n + 12\,500 \Leftrightarrow u_n = v_n - 12\,500 = 112\,500 \times 0,96^n - 12\,500$$

4. (a) *Avec la calculatrice :* $n \geq 54$

   (b) *Au matin du 54eme jour, il n'y aura plus d'eau dans le bassin.*

Exercice 2 (8 points)

Une entreprise fabrique et commercialise un alliage métallique. Chaque mois, elle peut produire jusqu'à 10 *tonnes de cet alliage et en vend toute la production.*

1. *Le coût total de production de x tonnes de l'alliage, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C dont l'expression est $C(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 135$ où x appartient à l'intervalle [0 ; 10].*

   Après une étude de marché, le prix de vente de l'alliage produit a été fixé à 60 *milliers d'euros la tonne.*

   (a) *La recette pour la vente de* 5 *tonnes d'alliage est de 300 milliers d'euros* $60 \times 5 = 300$.

   (b) *On note R la fonction qui modélise la recette, exprimée en milliers d'euros, pour x tonnes vendues.*
   L'expression de $R(x)$ en fonction de x est alors $R(x) = 60x$.

2. *On note B la fonction qui modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, sur l'intervalle [0 ; 10].*

   (a) *Montrons que l'expression de $B(x)$, lorsque x appartient à l'intervalle [0 ; 10] est : $B(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 135$. Le bénéfice est la différence entre les recettes et les coûts.*
   $B(x) = 60x - (x^3 - 6x^2 + 24x + 135) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 135$.
   Nous obtenons le résultat attendu.

   (b) *On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Déterminons $B'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 10].*
   $B'(x) = -(3x^2) + 6(2x) + 36 = -3x^2 + 12x + 36$

   (c) $\Delta = 576$
   $x_1 = 6$ *ou* $x_2 = -2$
   Donc : $B'(x) > 0$ *sur]0;6[*
   Étudions les variations de B sur l'intervalle [0 ; 10].
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante sur I.
   $B'(x) \geqslant 0$ *si* $x \in [0\ ;\ 6]$ *donc B est croissante sur cet intervalle.*
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$ alors la fonction f est décroissante sur I.
   $B'(x) \leqslant 0$ *si* $x \in [6\ ;\ 10]$ *donc B est décroissante sur cet intervalle.*
   Dressons le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle [0 ; 10].

x	0		6		10
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$			81		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	-135				-175

(d) *En lisant le tableau de variations, la quantité d'alliage à produire pour réaliser un bénéfice maximal est de 6 tonnes.*

Exercice 3 (4 points)

1. *Placer le point A sur le cercle ci-dessous tel que* $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}) = \dfrac{5\pi}{4}$ *rad*

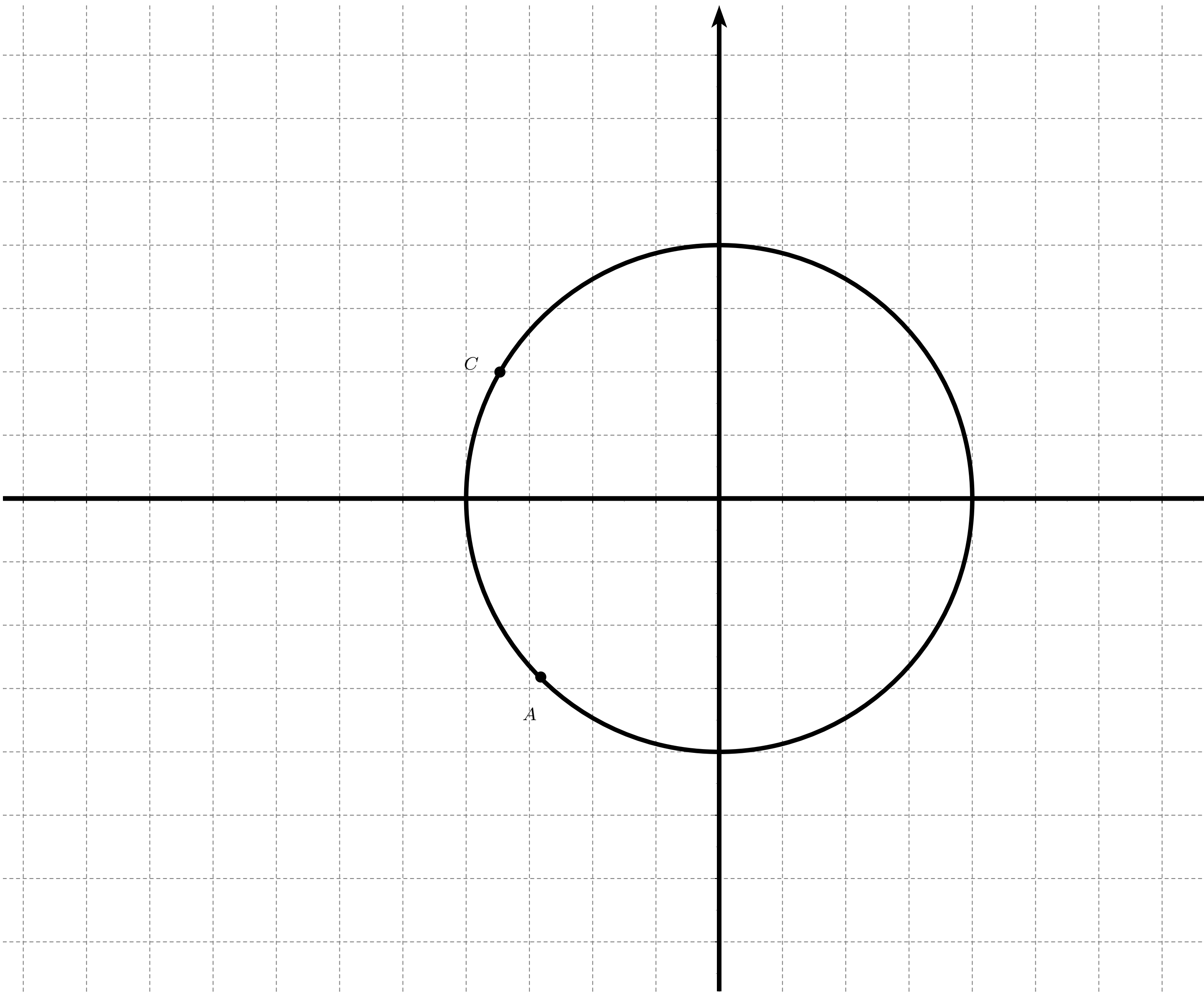
2. *Déterminer :* $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}) = \dfrac{5\pi}{6}$ *rad*

3. *Résoudre dans* $[0;2\pi[$ *:* $cosx = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   $x = \dfrac{5\pi}{6}$ *rad ou* $x = \dfrac{7\pi}{6}$ *rad*

4. *Résoudre dans* $[-\pi;\pi[$ *:* $sinx < \dfrac{1}{2}$

   $x \in [-\pi;\dfrac{\pi}{6}[\cup]\dfrac{5\pi}{6};pi]$


C
A