Exercice 1 (7 points)

Dans une ville, un opéra décide de proposer à partir de 2014 un abonnement annuel pour ses spectacles.

L'évolution du nombre d'abonnés d'une année à la suivante est modélisée par le directeur de l'opéra qui prévoit que 75 % des personnes abonnées renouvelleront leur abonnement l'année suivante et qu'il y aura chaque année 300 *nouveaux abonnés.*

Ainsi, pour tout entier naturel n, u_n *modélise le nombre d'abonnés pour l'année* $(2014+n)$.

Pour l'année 2014, il y a 500 *abonnés, autrement dit* $u_0 = 500$.

1. *Pour calculer* u_1, *on prend 75 % de* $u_0 = 500$, *ce qui donne 375 et on ajoute 300; donc* $u_1 = 675$.

   Pour calculer u_2, *on prend 75 % de* $u_1 = 675$, *ce qui donne 506,25 et on ajoute 300, ce qui fait* $806,25$; *on arrondit à l'entier:* $u_2 = 806$.

2. *Prendre 75 % d'une somme, c'est multiplier par 0,75; de plus, chaque année il y a 300 abonnés de plus. Donc on passe du nombre d'abonnés d'une année au nombre d'abonnés de l'année suivante en multipliant par 0,75 et en ajoutant 300 : pour tout entier naturel* n,

   $u_{n+1} = 0,75\, u_n + 300$.

3. *On définit la suite* (v_n) *par : pour tout entier naturel* n, $v_n = u_n - 1\,200$; *donc* $u_n = v_n + 1\,200$.

   (a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 1\,200 = 0,75\, u_n + 300 - 1\,200 = 0,75(v_n + 1\,200) - 900 = 0,75\, u_n + 900 - 900$
   $= 0,75\, v_n$

   $v_0 = u_0 - 1\,200 = 500 - 1\,200 = -700$

   Donc la suite (v_n) *est géométrique de premier terme* $v_0 = -700$ *et de raison* $q = 0,75$.

   (b) *La suite* (v_n) *est géométrique de premier terme* $v_0 = -700$ *et de raison* $q = 0,75$ *donc, pour tout entier naturel* n, $v_n = v_0 \times q^n = -700 \times 0,75^n$.

   Or $u_n = v_n + 1\,200$ *donc, pour tout entier naturel* n, $u_n = -700 \times 0,75^n + 1\,200$

   (c) $u_{10} = -700 \times 0,75^{10} + 1\,200 \approx 1\,161$

   $n = 10$ *correspond à* $2014 + 10 = 2024$; *on peut donc estimer qu'il y aura 1 161 abonnés en 2024.*

4. *On souhaite écrire un algorithme qui permette d'afficher l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnements sera supérieur à 1 190.*

   On propose trois algorithmes :

Algorithme 1
```
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que U ⩽ 1 190
  Affecter à n la valeur n+1
  Affecter à U la valeur
    −700 × 0,75^n + 1 200
Fin Tant que
Affecter à n la valeur n + 2 014
Afficher n
```

Algorithme 2
```
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que U ⩽ 1 190
  Affecter à U la valeur
    −700 × 0,75^n + 1 200
  Affecter à n la valeur n+1
Fin Tant que
Affecter à n la valeur n + 2 014
Afficher n
```

Algorithme 3
```
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que U ⩽ 1 190
  Affecter à n la valeur n+1
  Affecter à U la valeur
    −700 × 0,75^n + 1 200
  Affecter à n la valeur n + 2 014
Fin Tant que
Afficher n
```

- *C'est l'algorithme 1 qui permet de répondre au problème.*
- *Dans l'algorithme 2, il y aura un décalage de l'indice n par rapport à la valeur de U puisqu'on affecte $n+1$ à n après le calcul de U.*
- *Dans l'algorithme 3, on ajoute 2014 à n à l'intérieur de la boucle et on va donc avoir successivement $n = 0$ (initialisation), $n = 1$ (entrée la 1ère fois dans la boucle), $n = 2\,015$ (sortie de la 1ère boucle), puis $n = 2\,016$, $n = 4\,030$ et on sort de la boucle avec affichage de $n = 4\,030$ qui n'est pas la bonne réponse.*

Exercice 2 (8 points)

Dans un lycée un groupe d'élèves participant à un club de presse a réalisé un journal et décidé de l'imprimer pour le vendre.

Les coûts d'impression en euros en fonction du nombre x de journaux sont estimés à l'aide de la fonction C définie par

$C(x) = 0,005x^2 - 0,6x + 200 \quad x \in [0\ ;\ 500]$.

La courbe représentative de la fonction C est tracée sur l'annexe.

Pour soutenir l'action des élèves du club de presse, le foyer leur donne une subvention de 150 euros. On décide alors de fixer le prix de vente du journal à 1,20 euros.

En vendant x journaux, les revenus en euros seront donnés par la fonction R définie par : $R(x) = 150 + 1,2x \quad x \in [0\ ;\ 500]$.

1. *Calculons les revenus correspondant à la vente de 250 journaux.* $R(250) = 150 + 1{,}20 \times 250 = 450$.

   La recette correspondant à la vente de 250 journaux est de 450 euros.

La représentation graphique de la fonction R est tracée sur l'annexe.

2. *À l'aide du graphique, déterminons l'intervalle dans lequel doit se trouver le nombre de journaux vendus pour que le club de presse du lycée réalise un bénéfice.*

   Il réalise un bénéfice lorsque la recette est supérieure aux coûts. Graphiquement, lorsque la courbe des coûts est en-dessous de celle des recettes.

   À la précision permise par le graphique, nous lisons l'intervalle [30 , 330].

3. *On désigne par B la fonction estimant le bénéfice en euros réalisé par le club de presse du lycée pour la vente de x journaux. Pour tout x appartenant à [0 ; 500],*

   $$B(x) = R(x) - C(x) = 150 + 1{,}20x - (0{,}005x^2 - 0{,}6x + 200) = -0{,}005x^2 + 1{,}8x - 50.$$

4. *Calculons la fonction dérivée, B', de la fonction B.* $B'(x) = -0{,}005(2x) + 1{,}8 = -0{,}01x + 1{,}8 \quad x \in [0\ ;\ 500]$.

   Sur $\mathbb{R}$, $-0{,}01x + 1{,}8 > 0 \iff x < 180$.

   Par conséquent, $B'(x) > 0$ *si* x *appartient à* $[0\ ;\ 180[$ *et* $B'(x) < 0$ *si* x *appartient à* $]180\ ;\ 500]$.

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ *alors* f *est strictement croissante sur* I. *Pour* $x \in [0\ ;\ 180[$, $B'(x) > 0$, *par conséquent* B *est strictement croissante sur cet intervalle.*

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ *alors la fonction* f *est strictement décroissante sur* I. *Pour* $x \in]180\ ;\ 500]$, $B'(x) < 0$, *par conséquent* B *est strictement décroissante sur cet intervalle.*

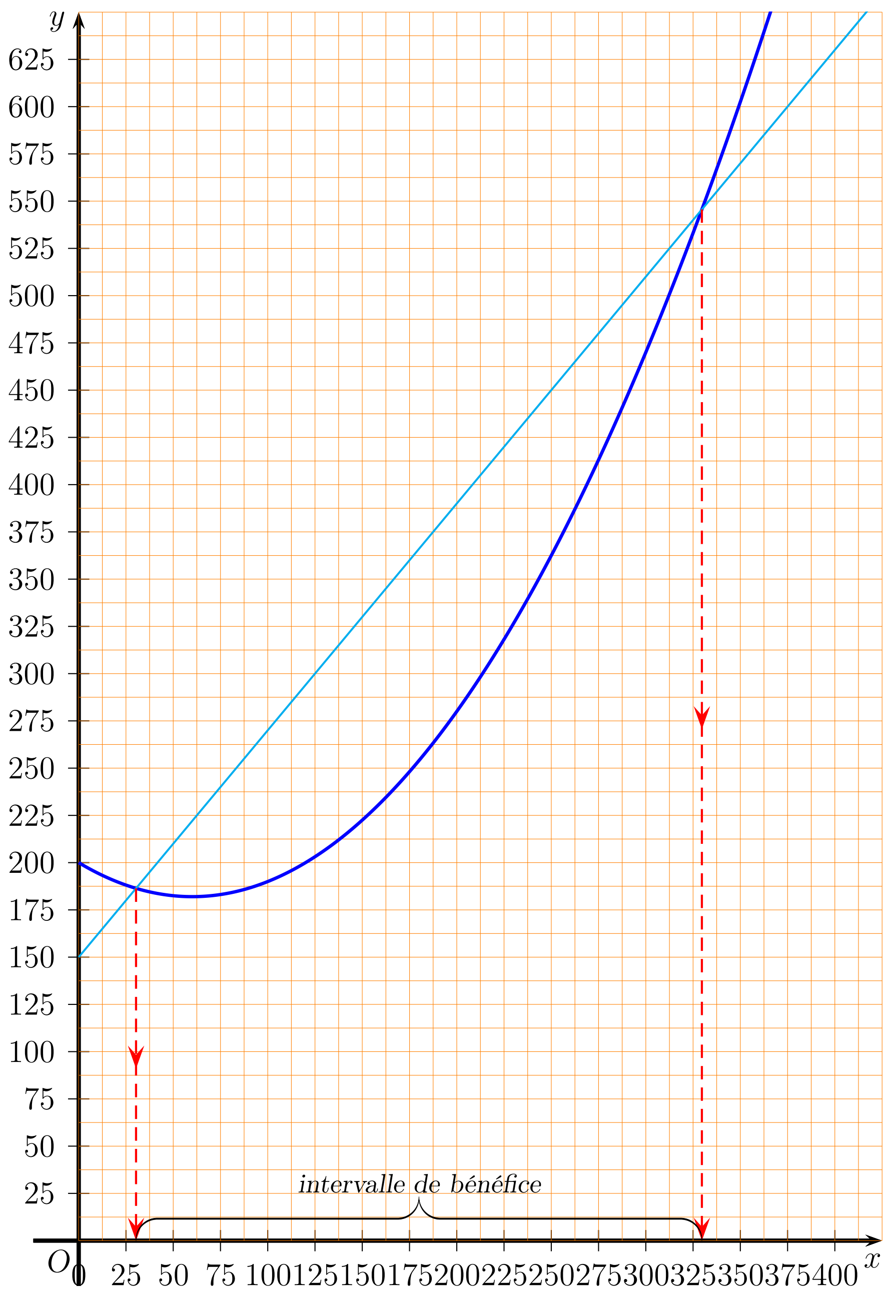
   Dressons le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle [0 ; 500]

x	0		180		500
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de B	-50	$\nearrow$	112	$\searrow$	-400

5. (a) *À l'aide du tableau de variation, le nombre de journaux à vendre pour que le bénéfice soit maximal est 180.*

   (b) *Ce bénéfice vaut alors 112 euros.*

ANNEXE
À RENDRE AVEC VOTRE COPIE



Exercice 3 (5 points)

Soit ABCD un rectangle tel que $AD = 2AB$. On note I le milieu de [AD] . Soient les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. On note G le milieu de [EC]

1. *Faire une figure*
2. *Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$*

   $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

3. *On se place dans le repère* $(A; \overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AB})$

   (a) *Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure*

   A(0;0) ; I(1;0) ; D(2;0) ; B(0;1) ; E(0;2) ; C(2;1) ; F(3;0) ; G$(1; \dfrac{3}{2})$

   (b) *Démontrer que les droites (AG) et (FE) sont perpendiculaires .*

   $\overrightarrow{AG}(1; \dfrac{3}{2})$ *et*

   $\overrightarrow{FE}(-3; 2)$ *donc* $\overrightarrow{AG}\overrightarrow{FE} = -3 \times 1 + 2 \times \dfrac{3}{2} = 0$

   Donc les droites (FE) et (AG) sont perpendiculaires .