Exercice 1 (10 points)

Dans une ville, un service périscolaire comptabilise 150 élèves inscrits en septembre 2014. On admet que, chaque année, 80 % des élèves inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 40 nouveaux élèves inscrits. La capacité d'accueil du périscolaire est de 190 élèves maximum.

On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au périscolaire en septembre de l'année $2014 + n$, avec n un nombre entier naturel.

On a donc $u_0 = 150$.

1. *Il y a 150 élèves en périscolaire en 2014. Il en reste 80 % ce qui fait $150 \times 0,8 = 120$. Il y a 40 nouveaux élèves, ce qui fait $120 + 40 = 160$.*

   Il y aura donc 160 élèves inscrits au périscolaire en 2015.

2. *Il y a u_n élèves inscrits l'année $2014 + n$. L'année suivante il en reste 80 %, ce qui fait $0,8u_n$. Il y a 40 nouveaux inscrits l'année $2014 + (n + 1)$ donc $u_{n+1} = 0,8u_n + 40$, pour tout entier naturel n.*

3. *On donne l'algorithme suivant :*

Initialisation	*Affecter à n la valeur 0*
	Affecter à U la valeur 150
Traitement	*Tant que $U \leqslant 190$*
	n prend la valeur $n + 1$
	U prend la valeur $0,8U + 40$
	Fin tant que
Sortie	*Afficher le nombre $2014 + n$*

   (a) *On complète le tableau en s'arrêtant dès que $U > 190$:*

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur de U	150	160	168	124,40	179,52	183,62	186,89	189,51	191,61
Condition $U \leqslant 190$	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	fausse

   (b) *L'affichage en sortie d'algorithme est $2014 + 8$ soit 2022.*

   Cela correspond à la première année pour laquelle le nombre d'inscrits en périscolaire va dépasser 190.

4. *On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$; donc $u_n = v_n + 200$.*

   (a)
   - $v_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 0,8u_n + 40 - 200 = 0,8\,(v_n + 200) - 160 = 0,8v_n + 160 - 160 = 0,8v_n$
   - $v_0 = u_0 - 200 = 150 - 200 = -50$

   Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = -50$.

(b) (v_n) *est une suite géométrique de raison* $q = 0,8$ *et de premier terme* $v_0 = -50$ *donc, pour tout entier naturel* n, $v_n = v_0 \times q^n = -50 \times 0,8^n$. *Or* $u_n = v_n + 200$. *On en déduit que, pour tout entier naturel* n, $u_n = 200 - 50 \times 0,8^n$.

(c) *Par lecture de la calculatrice ,* $n = 8$.

(d) *La capacité d'accueil du périscolaire est de 190 élèves maximum.*
$n = 8$ *correspond à l'année* $2014 + 8 = 2022$*; c'est donc à partir de 2022 que la directrice du périscolaire sera obligée de refuser des inscriptions.*

Exercice 2 (10 points)

Soit f *la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 10] par* $f(x) = (2x - 5)e^{-x+4} + 20$.

Partie A

1. $f'(x) = 2 \times e^{-x+4} + (2x - 5) \times (-1)e^{-x+4} + 0 = (-2x + 7)e^{-x+4}$

2. *Pour tout* x, $e^{-x+4} > 9$ *donc* $f'(x)$ *est du signe de* $-2x + 7$ *qui s'annule et change de signe pour* $x = 3,5$.

   On calcule:

   $f(0) = -5e^4 + 20 \approx -252,991$; $f(3,5) = 2e^{0,5} + 20 \approx 23,297$ *et* $f(10) = 15e^{-6} + 20 \approx 20,037$

   D'où le tableau de variation de la fonction f*:*

x	0		$3,5$		10
$-2x+7$		$+$	0	$-$	
e^{-x+4}		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-252,991$	↗	$23,297$	↘	$20,037$

3. *On complète le tableau de variation de la fonction* f*:*

x	0	α	$3,5$		10
$f(x)$	$-252,991$	↗ 0 ↗	$23,297$	↘	$20,037$

   On peut en déduire que l'équation $f(x) = 0$ *admet une solution unique dans [0;10] et que cette solution est dans [0;3,5] , en utilisant la calculatrice , plus précisément dans [1,59;1,60]*

Partie B

Une entreprise fabrique entre 0 et 1 000 objets par semaine.

Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets est modélisé par la fonction f définie sur [0;10] par : $f(x) = (2x - 5)e^{-x+4} + 20$.

1. *Le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum correspond à $x = 3,5$ centaines d'objets donc 350 objets.*

   $f(3,5) = 23,297$ *donc le bénéfice maximal réalisé est de* $23\,297$ *euros.*

2. *L'entreprise réalise un bénéfice quand il vend au moins x centaines d'objets avec $f(x) > 0$.*

   D'après le tableau de variation de la fonction f, il faut pour cela que $x > \alpha$.

   Or $\alpha \in [1,59; 1,6]$ donc il faut vendre au moins 160 objets pour réaliser un bénéfice.