Exercice 1 (10 points)

A. Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par

$$\boldsymbol{g(x) = \mathrm{e}^{x}(1-x)+1.}$$

1. $g'(x) = \mathrm{e}^x(1-x) - \mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$ *qui est du signe* $-x$ *; donc*
   $g'(0) = 0$ *;* g *a donc un maximum en* 0 *:* $g(0) = 1+1 = 2$.

x	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{3}{e^2}+1$	$\nearrow$	2	$\searrow$	

2. $g(1,27) \approx 0,039$ *et* $g(1,28) \approx -0,007$.
   Donc : $\alpha \in [1,27\ ;\ 1,28]$. *Avec* $g(\alpha) = 0$.

3. *sur* $]-2\ ;\ 0[$ *, On a* $g(x) > 0$.
   $g(x) > 0$ *sur* $[0\ ;\ \alpha[$ *et* $g(x) < 0$ *sur* $]\alpha\ ;\ +\infty[$.
   D'après la question précédente $g(x) > 0$ *sur* $[0\ ;\ \alpha[$ *et* $g(x) < 0$ *sur* $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

B. Étude de la fonction f définie sur $[-2;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1} + 2$.

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal ; unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. *Calculons* $d(x) = f(x)-(x+2) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1} + 2 - (x+2) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1} - x = x\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} - 1\right] = \dfrac{x - x\mathrm{e}^x - x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{-x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{-x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
   Pour $x < 0$, *le numérateur et le dénominateur sont positifs, donc* $d(x) > 0$, *ce qui signifie que la courbe* $\mathcal{C}_f$ *est au dessus de* d

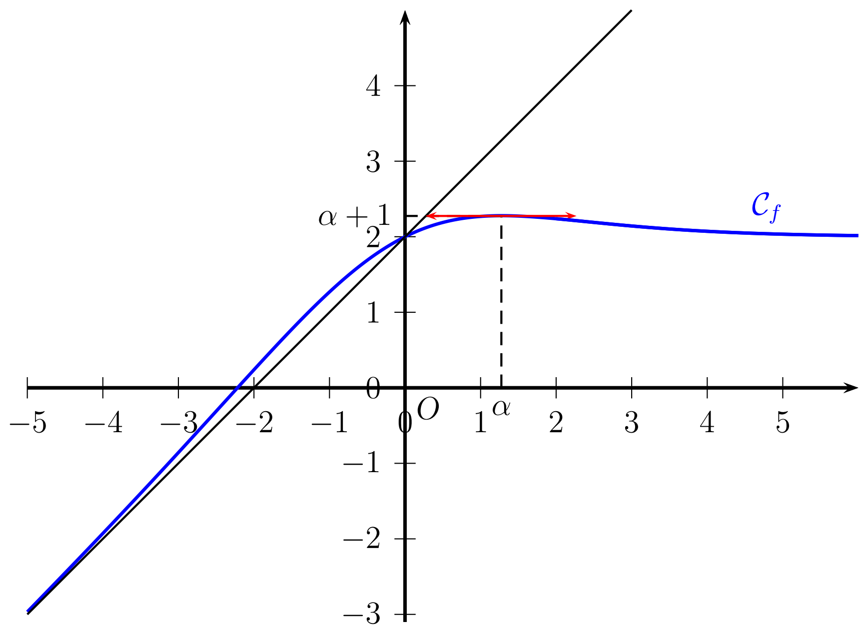
2. (a) $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1 - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x)+1}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{g(x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$.
   Le dénominateur est supérieur à 1, donc supérieur à 0 : le signe de $f'(x)$ *est celui de* g *vu dans la partie A.*
   On a donc $f'(x) > 0$ *sur* $]-\infty\ ;\ \alpha[$ *et* $f'(x) < 0$ *sur* $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

(b) On sait que $g(\alpha)=0 \iff e^{\alpha}(1-\alpha)+1=0 \iff e^{\alpha}(1-\alpha)=-1 \iff e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

Donc $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{e^{\alpha}+1}+2=\dfrac{\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1}+2=\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{1+\alpha-1}+2=\alpha-1+2=\alpha+1$.

(c) Des questions précédentes on déduit que f est croissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$ de moins l'infini à $\alpha+1$ et décroissante sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$ de $\alpha+1$ à 2.

3.



Exercice 2 (10 points)

1. (a) T_1 et P_1 étant équiprobables, $p(T_1)=p(P_1)=0,5$.

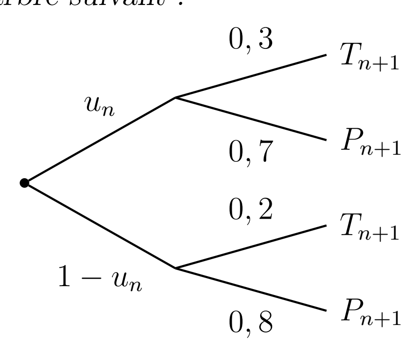
D'après l'énoncé la probabilité de prendre le toboggan après avoir pris le plongeoir est égale à $p_{P_1}(T_2)=1-0,8=0,2$.

Toujours d'après l'énoncé $p_{T_1}(T_2)=0,3$.

(b) D'après le principe des probabilités totales :

$p(T_2)=p(T_1\cap T_2)+p(P_1\cap T_2)=0,5\times 0,3+0,5\times 0,2=0,15+0,1=0,25=\dfrac{1}{4}$.

(c) Recopier et compléter l'arbre suivant :



(d) Toujours d'après le principe des probabilités totales :
$u_{n+1} = p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(P_n \cap T_{n+1}) = u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 = 0,3u_n + 0,2 - 0,2u_n = 0,1u_n + 0,2$.

(e) La calculatrice donne $u_1 = 0,5$; $u_2 = 0,25$; $u_3 = 0,225$; $u_4 = 0,225$; $u_5 = 0,2225$.
Il semble que u_n ait pour limite $0,222\ldots$.

(f) algorithme :

```
def termes(N):
    U=0,5
    for k in range(1,N+1):
        U = 0.1*U+0.2
    return(U)
```

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9} = 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{45} = \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{10}v_n$.

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{10}$; son premier terme est $v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$.

2. On sait que $v_n = v_1 \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{5}{18}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

   Comme $u_n = v_n + \frac{2}{9}$, on a $u_n = \frac{2}{9} + \frac{5}{18}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

3. Comme $0 < \frac{1}{10} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{9}$.

   Or $\frac{2}{9} = 0,222\ldots$ ce qui valide la conjecture faite à la question 1. e.