DS 9 spécialité maths première 14 mai 2024 Durée : 2 heures

Exercice 1

(5 points]

1. $u_1 = u_0 + \dfrac{5}{100} \times u_0 + 20 = 125$ *et* $u_2 = u_1 + \dfrac{5}{100} \times u_1 + 20 = 151,25$

2. *En un mois, la taille augmente de 5%, elle est donc multipliée par 1,05 puis on ajoute 20 cm.*

   On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}$ *on a :* $u_{n+1} = 1,05 \times u_n + 20$.

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} + 400$
   $$\begin{aligned} &= 1,05u_n + 420 \\ &= 1,05\,(u_n + 400) \\ &= 1,05v_n \end{aligned}$$
   On en déduit que (v_n) *est géométrique de raison* $q = 1,05$ *et de premier terme* $v_0 = u_0 + 400 = 500$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,05^n$

   (c) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,05^n$ *or* $v_n = u_n + 400$
   On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 500 \times 1,05^n - 400$

   (d) $u_7 = 500 \times 1,05^7 - 400 \approx 304$.
   À la fin du 7ème mois, le bambou mesurera environ 303 cm.

4. (a)

Test $u < 200$		vrai	vrai	vrai	vrai	faux
Valeur de u	100	125	151,25	178,81	207,75	
Valeur de n	0	1	2	3	4	

   (b) *À la fin de l'exécution, la valeur de* n *est 4. Cela signifie qu'il faut attendre la fin du 4ème mois pour le bambou mesure au moins 2 m.*

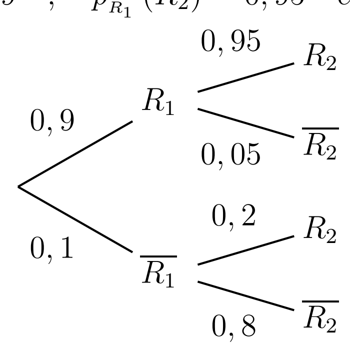
   (c)

```
u ← 50
n ← 0
Tant que u < 1000 faire
    u ← 1,05 × u + 20
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

Exercice 2 (5 points)

1. (a)

   L'énoncé donne $p\,(R_1) = 0,9$, $p_{R_1}\,(R_2) = 0,95$ *et* $p_{\overline{R_1}}\,(R_2) = 0,2$.



(b)

On cherche $p\left(R_1 \cap R_2\right)$

$p\left(R_1 \cap R_2\right) = p\left(R_1\right) \times p_{R_1}\left(R_2\right) = 0,9 \times 0,95 = 0,855$

(c)

On cherche $p\left(R_2\right)$

R_1 *et* $\overline{R_1}$ *forment une partition de l'univers donc, d'après les probabilités totales on a:*

$$\begin{aligned} p\left(R_2\right) &= p\left(R_1 \cap R_2\right) + p\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) \\ &= 0,855 + p\left(\overline{R_1}\right) \times p_{\overline{R_1}}\left(R_2\right) \\ &= 0,855 + 0,1 \times 0,2 \\ &= 0,875 \end{aligned}$$

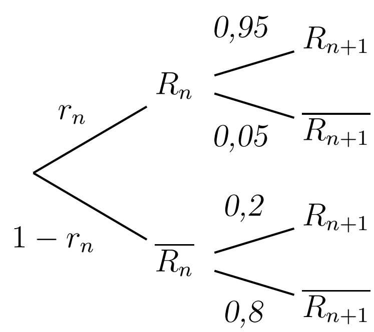
(d)

On cherche $p_{R_2}\left(\overline{R_1}\right)$

$$p_{R_2}\left(\overline{R_1}\right) = \frac{p\left(\overline{R_1} \cap R_2\right)}{p\left(R_2\right)}$$

$$p_{R_2}\left(\overline{R_1}\right) = \frac{0,02}{0,875} = \frac{4}{175} \approx 0,023$$

2. (a)



(b)

R_n *et* $\overline{R_n}$ *forment une partition de l'univers donc, d'après les probabilités totales on a:*

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= p\left(R_{n+1}\right) \\ &= p\left(R_n \cap R_{n+1}\right) + p\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) \\ &= p_{R_n}\left(R_{n+1}\right) \times p\left(R_n\right) + p_{\overline{R_n}}\left(R_{n+1}\right) \times p\left(\overline{R_n}\right) \\ &= 0,95 r_n + 0,2\left(1 - r_n\right) \\ &= 0,75 r_n + 0,2 \end{aligned}$$

(c)

i. $u_{n+1} = r_{n+1} - \frac{4}{5} = \frac{3}{4} r_n + \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3}{4}(r_n - \frac{4}{5}) = \frac{3}{4} u_n$

La suite (u_n) *est donc géométrique de raison 0,75 et de premier terme* $u_1 = 0,9 - 0,8 = 0,1$

ii. *On a donc* $u_n = 0,1 \times 0,75^{n-1}$ *et donc* $r_n = u_n + \dfrac{4}{5} = 0,1 \times 0,75^{n-1} + \dfrac{4}{5}$

iii.

$|0,75| < 1$ *donc* $0,75^{n-1}$ *tend vers 0 et par opération sur les limites on a la suite qui tend vers 0,8*

On en déduit qu'avec le temps, la probabilité pour un client de rendre la bouteille se stabilise à 0,8

Exercice 3

1. *On lit* $f(0) \approx 112$ *et* $f(60) \approx 70$.
2. *C'est le coefficient directeur de la tangente en A ; cette tangente passe également par le point de coordonnées (20;60) donc* $f'(7) = \dfrac{60 - 104,5}{20 - 7} = -\dfrac{44,5}{13} = -3,42$
3. (a) *Voir l'annexe 2.*

   (b) *Chaque carreau représente une aire de 200 unités d'aire , en comptant les carreaux on peut estimer l'aire à environ 24 carreaux soit 4800 unités d'aire .*

Partie B

1. *La fonction f est dérivable car produit de sommes de fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$, *donc sur [0 ; 60].*

   La dérivée de la constante étant nulle, il faut dériver $u(x) \times v(x)$, *avec*

   $u(x) = 14x + 42$ *et* $v(x) = e^{-\frac{x}{5}}$, *on obtient :*

   $u'(x) = 14$ *et* $v'(x) = -\dfrac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}$. *Donc*

   $$f'(x) = 14e^{-\frac{x}{5}} + (14x+42) \times \left(-\frac{1}{5}\right) e^{-\frac{x}{5}} = e^{-\frac{x}{5}} \left(14 - \frac{14x + 42}{5}\right) = e^{-\frac{x}{5}} \left(\frac{70 - 14x - 42}{5}\right)$$
   $$= e^{-\frac{x}{5}} \left(\frac{28 - 14x}{5}\right).$$

2. (a) *Comme* $5 > 0$ *et que quel soit le réel x,* $e^{-\frac{x}{5}} > 0$, *le signe de* $f'(x)$ *est celui de la différence* $28 - 14x = 14(2 - x)$.

   On voit aisément que si $0 \leqslant x < 2$, *alors* $2 - x > 0$ *: la dérivée est positive sur [0 ; 2[;*

   $f'(2) = 0$ *;*

   si $x > 2$, *alors* $2 - x < 0$ *: la dérivée est négative sur]2 ; 60].*

   (b) *On déduit des résultats précédents le tableau de variations de la fonction f :*

x	0		2		60
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	112	↗	≈ 117	↘	≈ 70

Avec $f(0) = 70 + 42 = 112$; $f(2) = 70 + 70e^{-0,4} \approx 116,922$ *et* $f(60) = 70 + 882e^{-12} \approx 70,0054$.

3. $f''(x) = \dfrac{1}{5}(-14)e^{-\frac{x}{5}} + \dfrac{1}{5}(-14x+28)(-\dfrac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}) = \dfrac{14(x-7)}{25}e^{-\frac{x}{5}}$

Partie C

L'ébéniste découpe 2 accoudoirs identiques sur le modèle de la surface hachurée de l'annexe 2 en choisissant comme unité le cm.

*Il souhaite vernir les deux faces de chaque accoudoir (**annexe 1**) ainsi que le dossier du fauteuil dont l'aire est égale à 5 400 cm*^{2}*. Or il lui reste le quart d'un petit pot de vernis pouvant couvrir 10 m*^{2}*.*

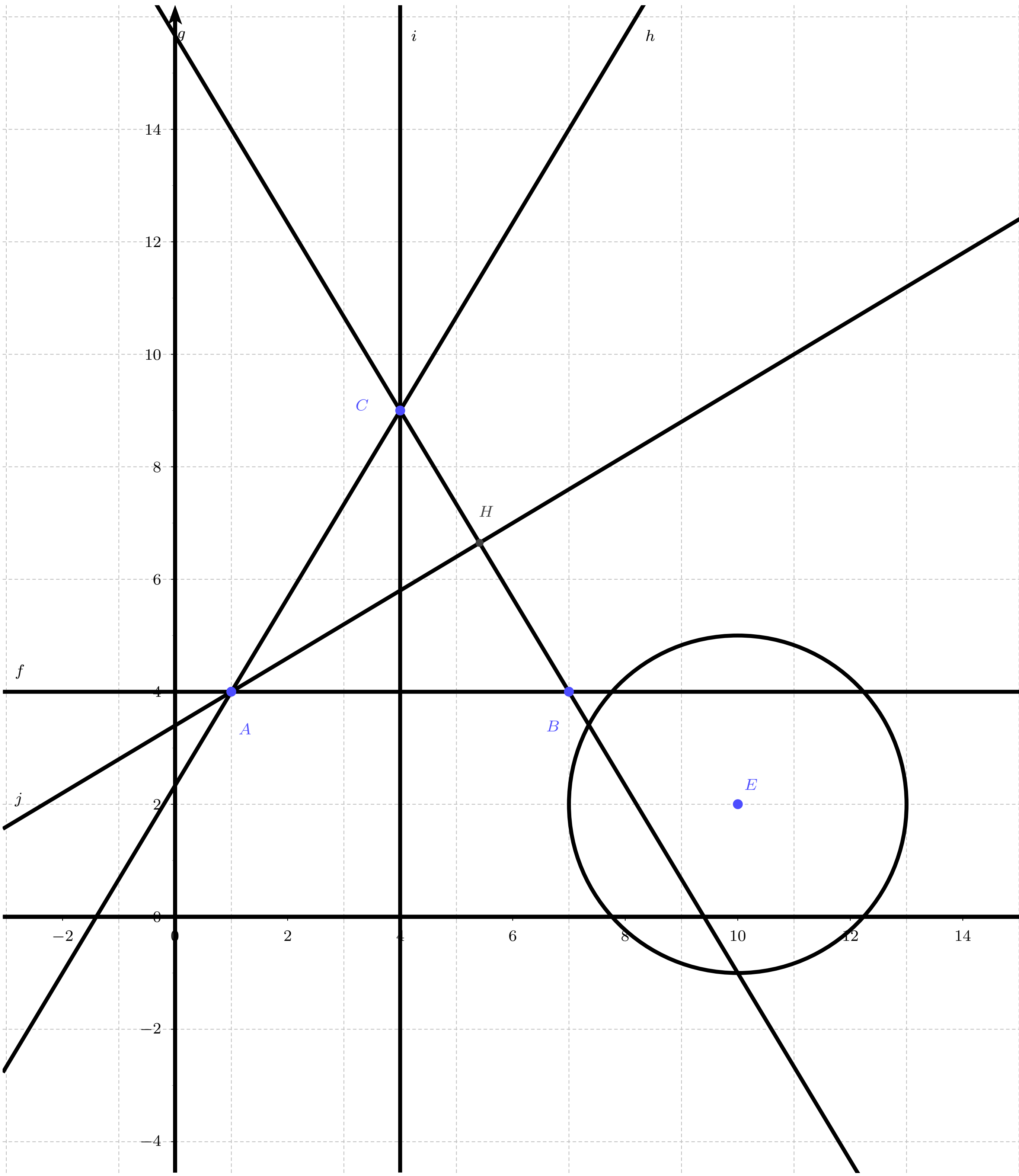
Il y a 2 accoudoirs à vernir sur les 2 faces, ce qui fait 4 faces en tout. La surface à vernir est, en cm^2*, d'environ* $4 \times 4\,800 + 5\,400 = 24\,600$ *soit 2,46 m*^{2}*.*

Il a un quart de pot qui couvre 10 m^2 *donc il peut vernir* $2,5$ *m*^{2}*.*

L'ébéniste aura donc assez de vernis.

Exercice 4

1. *Graphique*



2. *(AB) est une droite horizontale donc la hauteur issue de C qui lui est perpendiculaire est une droite verticale d'équation $x = 4$.*

3. *Soit H(x;y) un point de la hauteur . Alors $\overrightarrow{AH}(x-1; y-4)$ et $\overrightarrow{BC}(-3; 5)$ sont orthog-*

onaux d'où : $-3(x-1)+5(y-4)0 \iff -3x+5y-17=0$

4. *L'orthocentre est le point d'intersection des hauteurs donc* $x=4$ *et* $-12+5y-17=0 \iff y=\dfrac{29}{5}$

   L'orthocentre a donc pour coordonnées $(4;\dfrac{29}{5})$

5. *H est sur la hauteur issue de A et sur (CB) . Trouvons une équation de (CB) .*

   $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}(x-7;y-4)$ *sont colinéaires donc* $-3(y-4)-5(x-7)=0 \iff -5x-3y+47=0$.

   On doit donc résoudre le système avec les deux équations de droites . On obtient : $H(\dfrac{92}{17};\dfrac{113}{17})$

6. $(x-10)^2-100+(y-2)^2-4+95=0 \iff (x-10)^2+(y-2)^2=9$

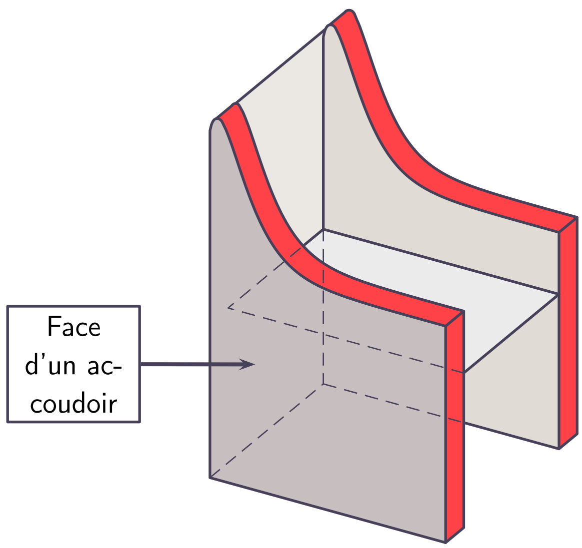
   Donc E(10;2) et $R=3$

7. *On a (AB) :* $y=4$ *donc* $(x-10)^2=5$ *donc* $x=10+\sqrt{5}$ *ou* $x=10-\sqrt{5}$

   Points d'intersection : $(10-\sqrt{5};4)$ *et* $(10+\sqrt{5};4)$

Annexes: à rendre avec la copie

Exercice 4
Annexe 1: ébauche du fauteuil



Annexe 2