# *DS 7 spécialité maths première 14 mars 2025*

**Exercice 1 ( 5 points )**
*Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3u_n - 12$ . On pose $v_n = u_n - 6$ .*

1. *Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme .*

   $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 3u_n - 12 - 6 = 3(u_n - 6) = 3v_n$

   *Donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = -2$*

2. *Exprimer $v_n$ en fonction de $n$*

   $v_n = -2 \times 3^n$

3. *En déduire $u_n$ en fonction de $n$*

   $u_n = v_n + 6 = -2 \times 3^n + 6$

4. *En déduire $u_{20} = -2 \times 3^{20} + 6 = -6973568796$*

**Exercice 2 (8 points)**
**Partie A**

1. $f'(x) = -e^{-x+1} + 1$ *et* $f'(x) > 0 \iff 1 > e^{-x+1} \iff e^0 > e^{-x+1} \iff 0 > -x + 1x > 1$.

   $f(1) = 1 + e^0 = 2$

   $f(0) = 0 + e^1 = e$ *et* $f(10) = 10 + e^{-9} \approx 10,00$

   *D'où le tableau de variations de la fonction $f$:*

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $e$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $10 + e^{-9}$ |

2. *La fonction $f$ admet donc sur [0;10] un minimum $f(1) = 2$.*

**Partie B**

*Une entreprise fabrique des objets. Sa capacité de production est limitée, compte tenu de l'outil de production utilisé, à mille objets par semaine.*

*Le coût de revient est modélisé par la fonction $f$ où $x$ est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et $f(x)$ le coût de revient exprimé en milliers d'euros.*

*Comme le nombre d'objets est limité à 1000 et que $x$ désigne le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines, on peut dire que $x \in [0; 10]$.*

1. *La fonction $f$ représente le coût de revient exprimé en milliers d'euros; ce coût est minimum lorsque la fonction $f$ atteint son minimum, c'est-à-dire pour $x = 1$.*

   *Pour que le coût de revient soit minimum, il faut donc produire 100 objets.*

2. *Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 euros. On appelle marge brute pour $x$ centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.*

   (a) *La vente de 100 objets rapporte $100 \times 12$ euros soit $1,2$ millier d'euros donc la vente de $x$ centaines d'objets rapporte $1,2x$ milliers d'euros.*

   (b) *La marge brute $g(x)$ est la différence entre le prix de vente et le coût de production donc:*
   $g(x) = 1,2x - (x + e^{-x+1}) = 0,2x - e^{-x+1}$

   (c) *Sur [0;10] , $g'(x) = 1 + e^{-x+1}$. Or pour tout réel $x$, $e^{-x+1} > 0$, donc $g'(x) > 0$ sur [0;10] et la fonction $g$ est strictement croissante sur cet intervalle.*

3. (a) $g(0) = -e < 0$ *et* $g(10) = 0,2 \times 10 - e^{-9} \approx 2 > 0$
   *D'où le tableau de variations de la fonction $g$:*

| $x$ | $0$ | $\alpha$ | $10$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-e$ | $0$ | $2 - e^{-9}$ |

   *D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ sur l'intervalle [0;10].*
   $\alpha \in [1,94; 1,95]$

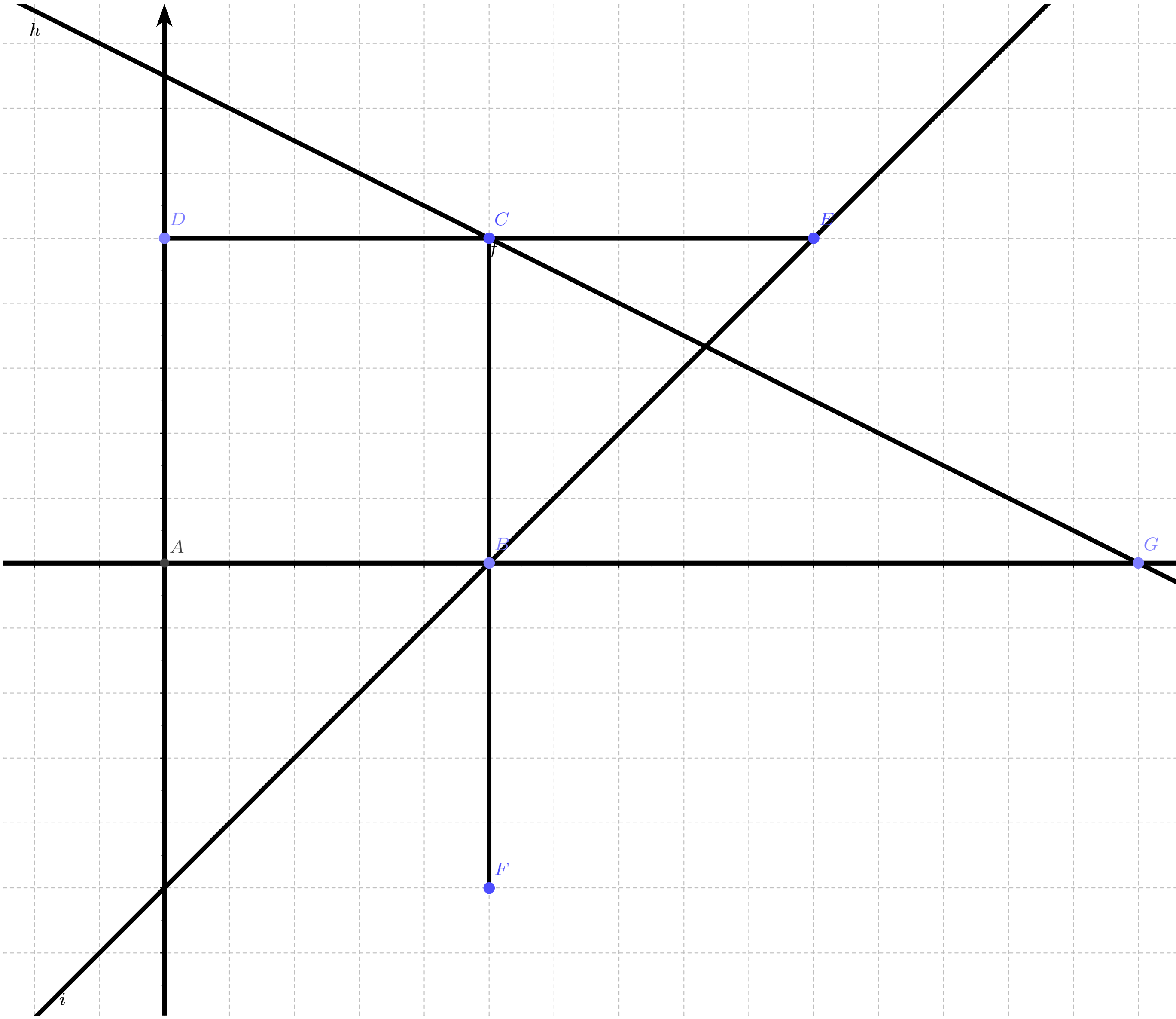
4. *Pour réaliser une marge brute positive, il faut produire $x$ centaines d'objets de façon que $g(x) > 0$; donc il faut que $x > \alpha$.*

   *On sait que $\alpha \in [1,94; 1,95]$ et que $x$ représente des centaines d'objets.*

   *La quantité minimale d'objets à produire pour que cette entreprise réalise une marge brute positive est donc de 195.*

**Exercice 3 (7 points )**
*Soit ABCD un carré de côté 5 cm . On donne les points E , F et G tels que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DC}$ , $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB}$*

1. *Faire une figure*




2. *Développer et calculer* $(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BG})\cdot(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF})=0$

3. *En déduire que les droites (CG) et (EF) sont perpendiculaires .*
   $\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BG})\cdot(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF})=0$
   *Donc les droites (CG) et (EF) sont perpendiculaires*

4. *On se place maintenant dans le repère* $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$
   (a) *Donner par lecture graphique les coordonnées de C(1;1) , G(3;0) , E(2;1) et F(1;-1)* .
   (b) *En déduire par le calcul que (CG) et (EF) sont perpendiculaires*
   $\overrightarrow{CG}(2;-1)$ *et* $\overrightarrow{EF}(-1;-2)$.

*Donc :* $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{EF} = 2(-1) + (-1)(-2) = 0$

*Donc les droites (CG) et (EF) sont perpendiculaires*