1 Unicité de la fonction exponentielle

A retenir

La fonction $f(x) = e^x$ est la seule fonction vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)\ \forall x$

Le principe

Pour démontrer l' unicité , on utilise un deuxième objet.

La démonstration

- Soit g une fonction telle que $g(0) = 1$ et $g'(x) = g(x)$
- Posons $h(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$ pour tout x .
- Procédé qui va être suivi : montrer $h'(x) = 0\ \forall x$ puis $h(x) = 1\ \forall x$ et donc $g(x) = e^x\ \forall x$
- $h'(x) = \dfrac{g'(x)e^x - g(x)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{g(x)e^x - g(x)e^x}{(e^x)^2} = 0\ \forall x$
- $h'(x) = 0\ \forall x$ donc h est une fonction constante . Or $h(0) = \dfrac{g(0)}{e^0} = 1$. Donc $h(x) = 1\ \forall x$
- Conclusion : $g(x) = e^x\ \forall x$ donc la fonction $f(x) = e^x$ est la seule fonction vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$

2 La relation fonctionnelle

A retenir

$e^{x+y} = e^x \times e^y$ pour tous x et y réels

Le principe

On montre que la fonction exponentielle vérifie la formule en utilisant une fonction auxiliaire .

La démonstration

- On sait que $e^0 = 1$ et que $(e^x)' = e^x$.
- On pose $g(x) = \dfrac{e^{x+y}}{e^x}$ $\forall x$ pour un y quelconque .
- Puisque g est en fonction de x , y est considérée comme une constante donc $g'(x) = \dfrac{e^{x+y}e^x - e^x e^{x+y}}{(e^x)^2} = 0\ \forall x$
  On peut donc en déduire que g est **une fonction constante**
- $g(0) = \dfrac{e^y}{1} = e^y$
- On a donc : $g(x) = e^y$ et $e^{x+y} = e^x e^y$ pour tous x et y réels .

3 Les propriétés algébriques

A retenir

1. $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
2. $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$
3. $e^{nx} = (e^x)^n$ pour tout n entier naturel non nul .

Le principe

On applique la relation fonctionnelle

Les démonstrations

1. $e^{x-y}e^y = e^{x-y+y}$ **par la relation fonctionnelle**
   $e^{x-y}e^y = e^x$ **donc** $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
2. On utilise la formule précédente : $\dfrac{e^0}{e^x} = e^{0-x}$
3. Par récurrence , l'initialisation est immédiate avec $n = 1$
   Hérédité : on suppose que pour un n donné , $e^{nx} = (e^x)^n$, alors :
   $e^{(n+1)x} = e^{nx}e^x$ **par la relation fonctionnelle**
   $= (e^x)^n e^x = (e^x)^{n+1}$

4 Les propriétés de la fonction exponentielle

A retenir

1. $e^x > 0 \; \forall x$
2. La fonction e^x est strictement croissante pour tout x réel
3. $a < b \iff e^a < e^b$ pour tous réels a et b .

Le principe

On applique les définitions

Les démonstrations

1. $e^x = e^{\frac{x}{2}} e^{\frac{x}{2}} = (e^x)^2 \geq 0$.
   Supposons qu'il existe un x tel que $e^x = 0$, alors : $e^{x+y} = e^x e^y \iff e^y = 0$ **et donc** $e^x = 0 \; \forall x$
   Donc $e^x > 0 \; \forall x$
2. $(e^x)' = e^x > 0$ **donc** e^x **croissante**
3. Par définition d'une fonction strictement croissante .