

Fiche 5 : Comportement d'une suite

Ce qu'il faut savoir

Une suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 , si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Une suite (u_n) est décroissante à partir du rang n_0 , si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Pour étudier les variations d'une suite, on calcule $u_{n+1} - u_n$ et on étudie le signe.

Exercices d'applications directes

Exercice 1

Etudier les variations des suites données

1) $u_n = \frac{3}{n^2}$

2) $u_n = \frac{2n-1}{n+4}$

4) $u_n = \frac{1}{1+n^2}$

5) $u_n = \sqrt{3n+1}$

3) $u_n = 2^n$

Exercice 2

Intuitivement, déterminer les limites, si elles existent, des suites :

1) $u_n = \sqrt{n+2}$

2) $u_n = 0,98^n$

3) $u_n = 3 - \frac{5}{n}$

4) $u_n = (-1)^n$

Approfondissement

Exercice 1

Les suites (v_n) et (w_n) sont définies par $v_0 = -1$ et pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + 2 \text{ et } w_n = v_n - \frac{8}{3}$$

- 1) Déterminer la nature de la suite (w_n)
- 2) Exprimer w_n puis v_n en fonction de n
- 3) Étudier le sens de variation de (v_n)
- 4) Déterminer la valeur minimale de n pour que $v_n = \frac{8}{3}$ à 10^{-6} près
- 5) Quelle est intuitivement la limite de (v_n) ?

Exercice 2

On définit la fonction f et la suite (u_n) de la façon suivante, n étant un entier naturel :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3 \text{ et } u_0 = -5, u_{n+1} = f(u_n)$$

- 1) Représenter les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses et conjecturer le comportement de la suite (u_n)
- 2) Déterminer le réel a tel que $f(a) = a$
- 3) Soit la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - a$ pour tout n entier naturel. Déterminer la nature de (v_n)
- 4) Démontrer votre conjecture.

Algorithmique

Ecrire un algorithme qui détermine le plus petit entier n tel que $2^n > 500$ puis le tester à la calculatrice.

Question ouverte

On colore la moitié d'un carré de côté 1 (étape 1). On continue en coloriant à chaque étape la moitié de la partie non colorée. L'aire totale colorée peut-elle être égale à 1 ? Si oui, à quelle étape ?