Devoir maison n ° 10 groupe lions

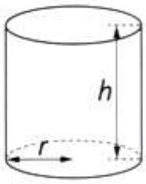
77. Au rayon des boîtes de conserve

On remarque dans les rayons de supermarché qu'il y a deux sortes de boîtes de conserve de contenance 425 mL : certaines contiennent des légumes, d'autres des fruits au sirop (par exemple).

On s'intéresse ici uniquement aux boîtes de conserve cylindriques.

On note r le rayon de la base (en cm) et h la hauteur de la boîte (en cm).

Les fabricants ne sont pas des philanthropes : ils cherchent à faire des économies !



Partie I : Les légumes

1. Sachant que $1\text{ L} = 1\text{ dm}^3$, montrer que :
$$425\text{ mL} = 425\text{ cm}^3.$$

2. On note V le volume de la boîte de conserve.
On sait que $V = 425\text{ cm}^3$.
Exprimer h en fonction de r.

3. Faire le patron d'une boîte cylindrique avec $r = 2$ et $h = 3$.

4. Montrer que l'aire totale S est :
$$S = \frac{850}{r} + 2\pi r^2.$$

5. On cherche à optimiser la quantité de métal utilisée pour la fabrication de la boîte, c'est-à-dire minimiser la surface S.
Pour cela, on définit la fonction f sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{850}{x} + 2\pi x^2.$$
En choisissant la fenêtre d'affichage :
$$\begin{cases} X\min : 0 \\ X\max : 20 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y\min : 0 \\ Y\max : 2\,000 \end{cases}$$
visualiser sur l'écran de la calculatrice la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;20]$.
La courbe représentative de la fonction f suggère une valeur de x permettant de minimiser la quantité de métal, mais son approximation visuelle n'est pas évidente.
Utiliser la fonction « Zoom » pour obtenir une meilleure vision.

6. L'approximation reste difficile ; on utilise donc un tableau de valeurs pour affiner l'optimisation.
Donner le tableau de valeurs de la fonction f sur l'intervalle $[3{,}9\,;4{,}2]$ avec un pas de 0,1.
Déterminer une valeur approchée au dixième par défaut du rayon qui minimise la surface de métal utilisée.

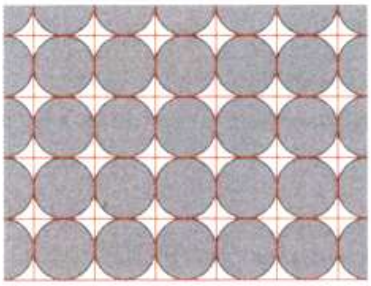
7. Observer une boîte de conserve contenant des légumes. Qu'en pensez-vous ?

Partie II : Les fruits au sirop

Les mathématiciens sont satisfaits, mais pas les techniciens !

En coupant les cylindres de métal, il y a trop de perte ; et cette perte, c'est de l'argent…

Observez le schéma suivant :



Ces disques sont contenus dans des carrés.

On s'intéresse ici à la quantité de métal utilisée pour une boîte, en tenant compte des pertes.

1. Montrer que l'aire totale utilisée est :
$$S' = \frac{850}{r} + 8r^2.$$

2. On cherche à optimiser la quantité de métal utilisée, c'est-à-dire à minimiser la surface S'.
Pour cela, on définit la fonction g sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = \frac{850}{x} + 8x^2.$$
Donner le tableau de valeurs de la fonction g sur $[3{,}5\,;4{,}0]$ avec un pas de 0,05.
Déterminer une valeur approchée du rayon qui minimise la surface de métal utilisée.

3. Observer une boîte de conserve contenant des fruits au sirop. Qu'en pensez-vous ?

On peut encore améliorer le principe en découpant le plan selon des hexagones. On obtient alors :