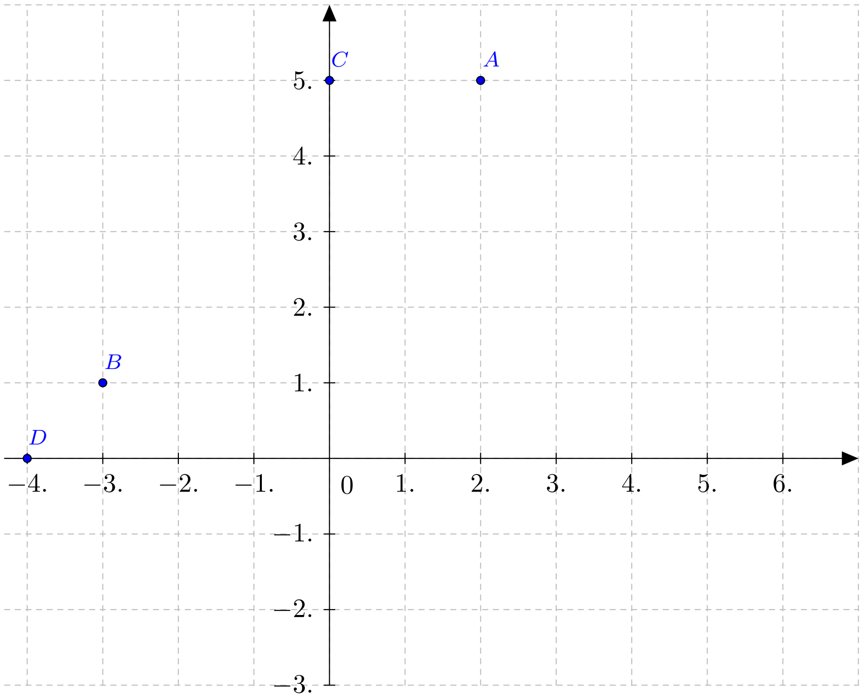
1 Coordonnées

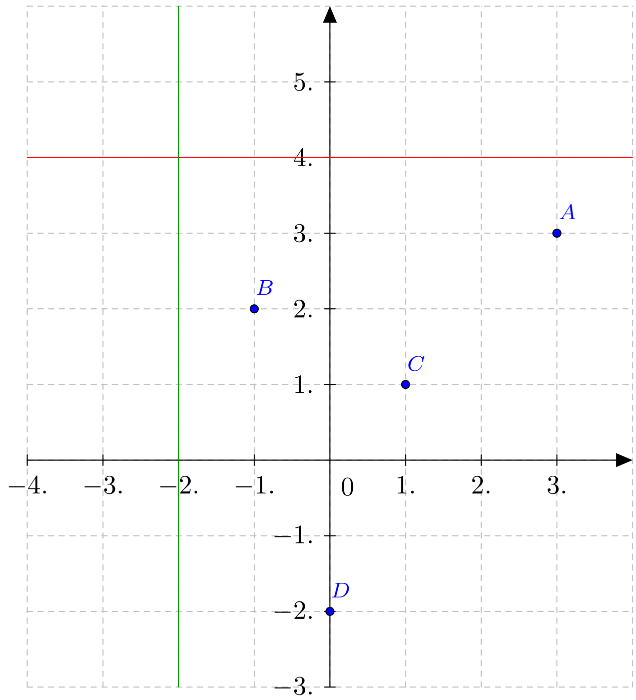
Exercice 1

Placer dans un repère les points suivants : A(2;5) , B(-3;1) , C(0;5) et D(-4;0).



Exercice 2

Voici un graphique



Lire les coordonnées des points du graphique A(3;3) , B(-1;2) , C(1,1) et D(0;-2)

Quelle est la caractéristique commune des points situés sur la droite rouge ? Tous les points ont la même ordonnée égale à 4

Quelle est la caractéristique commune des points situés sur la droite verte ? Tous les points ont la même abscisse égale à -2

2 Milieu , distance

A retenir

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors le milieu de [AB] a pour coordonnées $(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2})$ et la distance AB est égale à $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Exercice 3

Soient les points A(1;5) , B(3;7) , C(-4;5) et D(2;8)

Calculer $AB=\sqrt{(3-1)^2+(7-5)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Calculer $AC=\sqrt{(-4-1)^2+(5-5)^2}=\sqrt{25}=5$

Calculer $CD=\sqrt{(2+4)^2+(8-5)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

Calculer BD $BD=\sqrt{(2-3)^2+(8-7)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}=$

Calculer les coordonnées du milieu de [AB] $(\frac{1+3}{2};\frac{5+7}{2})$ *donc (2;6)*

Calculer les coordonnées du milieu de [BC] $(\frac{3-4}{2};\frac{7+5}{2})$ *donc* $(-\frac{1}{2};6)$

Calculer les coordonnées du milieu de [BD] $(\frac{3+2}{2};\frac{7+8}{2})$ *donc* $(\frac{5}{2};\frac{15}{2})$

Exercice 4

On donne dans un repère orthonormé (O, I , J) les points A(5;7) , B(1;9) et C(9;5) .

Calculer les coordonnées de I milieu de [AB] $I(\frac{5+1}{2};\frac{7+9}{2})$ *donc I(3;8)*

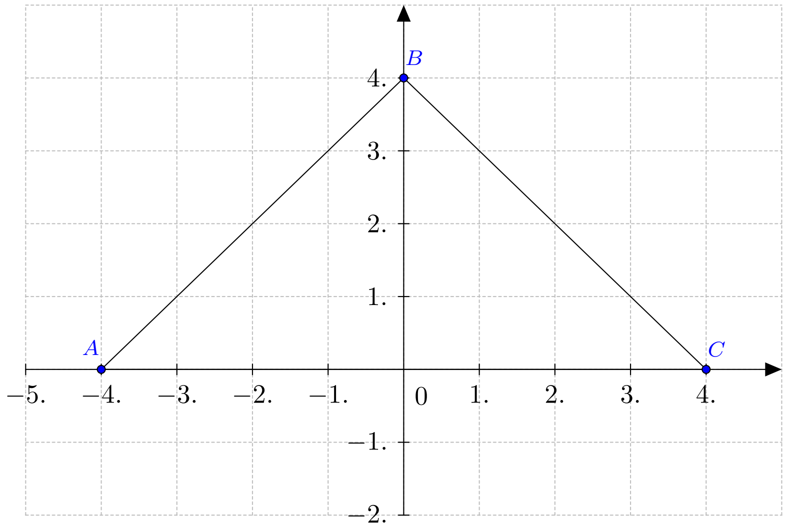
Calculer les coordonnées de J milieu de [BC] $J(\frac{1+9}{2};\frac{9+5}{2})$ *donc J(5;7)*

Calculer AB , AC et BC $AB=\sqrt{(1-5)^2+(9-7)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$;
$AC=\sqrt{(9-5)^2+(5-7)^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$;
$BC=\sqrt{(9-1)^2+(5-9)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

Que peut-on conclure pour le triangle ABC ? ABC est isocèle en A car AB = AC

Exercice 5

Dans un repère orthonormé (O , I , J) , on donne A(-4;0) , B(0,4) et C(4;0) .



Placer les points dans le repère

Quelle conjecture peut-on faire sur la nature du triangle ABC ? Le triangle ABC semble isocèle rectangle en B

Démontrer la conjecture (on pourra calculer AB , AC et BC) . $AB = \sqrt{(0+4)^2+(4-0)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$;
$AC = \sqrt{(4+4)^2+(0-0)^2} = \sqrt{64} = 8$;
$BC = \sqrt{(4-0)^2+(0-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
On a donc $AB = BC$ *et de plus* $AB^2 + BC^2 = AC^2$ *donc par la réciproque de Pythagore , le triangle ABC est rectangle en B .*

Exercice 6

Dans un repère orthonormé (O ,I , J) on donne les points A(1;0) et $B(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$ *Montrer que le triangle OAB est équilatéral .*
On va calculer OA , OB et AB : $OA = \sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2} = \sqrt{1} = 1$

$$OB = \sqrt{(\frac{1}{2}-0)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}-0)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$AB = \sqrt{(\frac{1}{2}-1)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}-0)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$OA = OB = AB$ *donc OAB est bien équilatéral .*

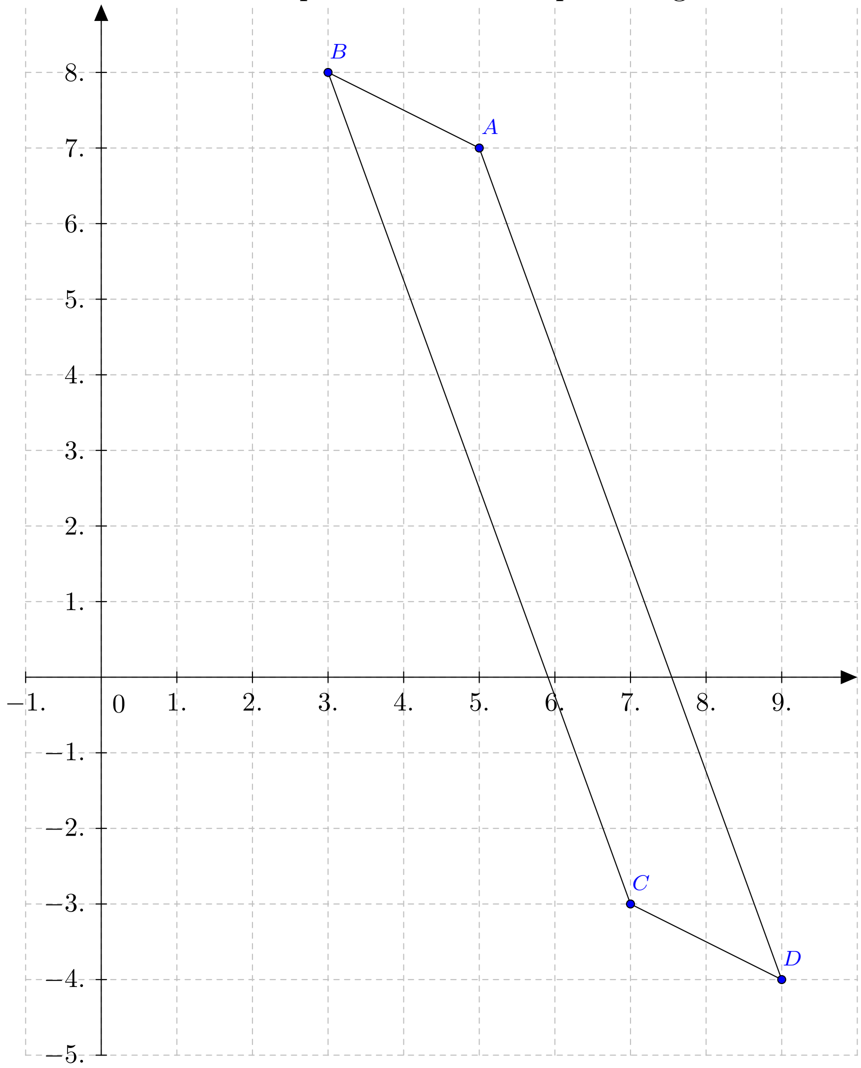
3 Parallélogrammes

A retenir

Quand on cherche les coordonnées du quatrième sommet d'un parallélogramme , on utilise le milieu commun des deux diagonales .

Exercice 7

On donne les points A(5;7) , B(3;8) et C(7;-3) . Le but de l'exercice est de trouver les coordonnées de D tel que ABCD soit un parallélogramme .



Placer les points A , B et C et tracer le parallélogramme ABCD .

Citer les diagonales . Les diagonales sont [AC] et [BD]

Calculer les coordonnées du milieu I de la diagonale connue . La diagonale connue est [AC] donc $I(\frac{5+7}{2};\frac{7-3}{2})$ *donc* $I(6;2)$

Ecrire la formule donnant les coordonnées du milieu de l'autre diagonale L'autre diagonale est [BD] donc les coordonnées de son milieu sont $(\frac{3+x_D}{2};\frac{8+y_D}{2}$

I est donc le milieu de [AC] et [BD] . Déterminer les coordonnées de D . En utilisant les coordonnées de I et la formule du milieu de [BD] , on a : $6=\frac{3+x_D}{2}$ *et* $2=\frac{8+y_D}{2}$ *. Ce qui donne* $12=3+x_D$*d'où* $x_D=12-3=9$ *et* $4=8+y_D$ *d'où* $y_D=4-8=-4$
On a donc D(9;-4)

Astuce

Faire le schéma même à main levée au brouillon pour voir l'ordre des lettres du parallélogramme et savoir qui sont les diagonales .

Exercice 8

Déterminer les coordonnées de G tel que EFGH soit un parallélogramme sachant que E(-3;4) , F(5;3) et H(-1;1) .

Les diagonales de EFGH sont [EG] et [FH] .

Calculons les coordonnées de I milieu de [FH] : $I(\frac{5-1}{2};\frac{3+1}{2}$ *donc* $I(2;2)$

I est aussi milieu de [EG] donc $2=\frac{-3+x_G}{2}$ *et* $2=\frac{4+y_G}{2}$ *. On a :* $x_G=7$ *et* $y_G=0$ *donc* $G(7;0)$

Exercice 9

On donne les points E(5;9) , F(-4;3) , G(-9;4) et H(0;10) . Montrer que EFGH est un parallélogramme .

Calculons les coordonnées du milieu de [EG] : $(\frac{5-9}{2};\frac{9+4}{2}$ *. Donc* $(-2;\frac{13}{2})$ *.*

Calculons maintenant les coordonnées du milieu de [FH] : $(\frac{-4+0}{2};\frac{3+10}{2})$ *. Donc* $(-2;\frac{13}{2})$ *.*

Les diagonales de EFGH ont le même milieu donc EFGH est un parallélogramme .

Exercice 10

On donne les points R(1;5) , S(-1;7) , T(1;9) .

Déterminer les coordonnées de U tel que RSTU soit un parallélogramme . Les diagonales de RSTU sont [RT] et [SU] . Le milieu de [RT] a pour coordonnées : $(\frac{1+1}{2};\frac{5+9}{2})$ *donc* $(1;7)$ *. Le milieu de [SU] a pour coordonnées* $(\frac{-1+x_U}{2};\frac{7+y_U}{2})$ *donc on doit résoudre :*

$1=\frac{-1+x_U}{2} \iff 2=-1+x_U \iff x_U=3$ *et*

$7=\frac{7+y_U}{2} \iff 14=7+y_U \iff y_U=7$ *.*

Donc U(3;7)

Montrer que RSTU est un losange . On sait que RSTU est un parallélogramme donc il suffit de montrer que deux côtés consécutifs ont la même longueur . Calculons donc RS et ST :

$RS=\sqrt{(-1-1)^2+(7-5)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$ST=\sqrt{(1+1)^2+(9-7)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Donc $RS=ST$ *et RSTU est bien un losange .*

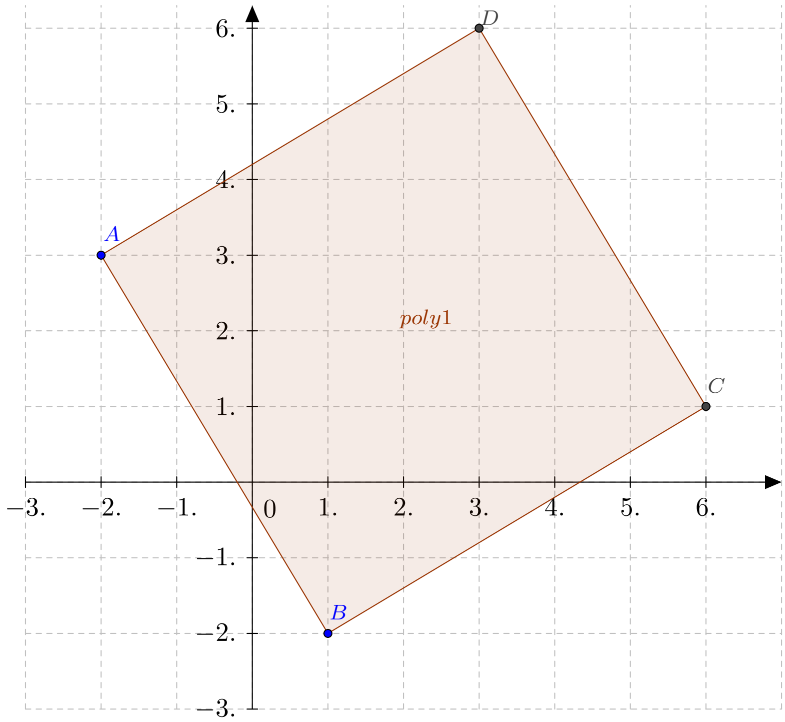
Montrer que RSTU est un carré . On vient de montrer que RSTU est un losange donc il suffit de montrer que RSTU est aussi rectangle , c'est à dire qu'il possède un angle droit . Puisqu'on a déjà calculer RS et ST , on va calculer RT et utiliser la réciproque de Pythagore :

$RT=\sqrt{(1-1)^2+(9-5)^2}=\sqrt{0+16}=4$

On remarque que $RS^2 + ST^2 = RT^2$ donc par la réciproque de Pythagore , on peut dire que le triangle RST est rectangle en S . Donc RSTU possède bien un angle droit . Conclusion, RSTU est un carré .

Exercice 11

On donne les points A(-2;3) , B(1;-2) et C(6;1) .



Placer les points dans le repère

Tracer le parallélogramme ABCD

Calculer les coordonnées de D pour que ABCD soit un parallélogramme . Les diagonales de ABCD sont [AC] et [BD] et doivent avoir le même milieu . Cherchons les coordonnées du milieu de [AC] :

$(\frac{-2+6}{2};\frac{3+1}{2})$ donc $(2;2)$

On doit donc avoir :$2 = \frac{1+x_D}{2} \iff 4 = 1 + x_D \iff x_D = 3$ *et*

$2 = \frac{-2+y_D}{2} \iff 4 = -2 + y_D \iff y_D = 6$

Donc D(3;6)

Conjecturer la nature de ABCD . Il semble que ABCD soit un carré

Démontrer rigoureusement la conjecture . On sait déjà que ABCD est un parallélogramme . Montrons maintenant que c'est un losange et un rectangle , autrement dit qu'il a deux côtés consécutifs égaux et un angle droit . Pour cela , calculons AB , BC et AC .

$AB = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$BC = \sqrt{(6-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$AC = \sqrt{(6+2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$

On a donc $AB = BC$ *et* $AB^2 + BC^2 = AC^2$ *et par la réciproque de Pythagore , on peut affirmer que* ABC *est rectangle en* B *. Conclusion ,* $ABCD$ *est un losange et un rectangle donc c'est un carré*