

49 Raisonner | 1. Conjecture

Choisir 10 nombres premiers quelconques strictement supérieurs à 3 et calculer pour chacun d'eux le reste de leur division euclidienne par 6. Émettre une conjecture sur la valeur du reste.

2. Démonstration

On note p un nombre premier, $p > 3$.

Il existe donc des entiers naturels q et r tels que $p = 6q + r$ avec $0 \leq r \leq 5$, r étant le reste de la division euclidienne de p par 6.

a. Démontrer que :

- si $r = 2$ ou $r = 4$, alors p est pair ;
- si $r = 0$ ou $r = 3$, alors p est divisible par 3.

b. En déduire que si p est un nombre premier strictement supérieur à 3, alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $p = 6q + 1$ ou $p = 6q + 5$.

3. Un tour de magie !

Démontrer, à l'aide du résultat de la question 2, que le résultat du programme de calcul suivant est toujours égal à 1.

- Choisir un nombre premier strictement supérieur à 3.
- Calculer son carré.
- Calculer le reste de la division euclidienne du résultat par 12.