182 **1.** $$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}$$
$$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

2. $S=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=\sqrt{3}-1.$

3.
$$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}}$$
$$=\sqrt{1}-\sqrt{0}+\sqrt{2}-\sqrt{1}+\ldots+\sqrt{2025}-\sqrt{2024}=\sqrt{2025}=45.$$
Donc S est un entier naturel.

184 $$\sqrt{\frac{4^{10}+8^{10}}{4^{11}+8^{4}}}=\sqrt{\frac{2^{20}+2^{30}}{2^{22}+2^{12}}}=\sqrt{\frac{2^{20}\left(1+2^{10}\right)}{2^{12}\left(2^{10}+1\right)}}$$
$$=\sqrt{\frac{2^{20}}{2^{12}}}=\sqrt{2^{8}}=2^{4}=16.$$

Donc $\sqrt{\dfrac{4^{10}+8^{10}}{4^{11}+8^{4}}}$ est un entier naturel.

185 $$\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^{n}\times\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)^{n}$$
$$=\left(\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\times\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\right)^{n}$$
$$=(18-12)^{n}=6^{n}$$
et 6^{n} est un entier naturel.