Les paradoxes en mathématiques

Petit historique

Les paradoxes ont été des outils mathématiques depuis l'Antiquité. Ils ont permis de faire avancer les théories, de montrer les failles ou au contraire de faire apparaître de nouvelles notions. Ceux que nous allons étudier ici, ont permis de donner à l'infini tout sa place dans les mathématiques car l'intuition ne permet pas toujours d'imaginer ce qui se passe à l'infini

Le paradoxe d'Achille et de la tortue, de Zénon d'Elée, Vème siècle avant JC

Le principe : Le guerrier Achille fait la course avec une tortue. On suppose qu'il est 10 fois plus rapide qu'elle. Si sa vitesse est de 1 $m.s^{-1}$, celle de la tortue est de 0,1 $m.s^{-1}$. Sur une distance de 1000 m on donne une avance de 100 m à la tortue. Le départ donné, quand Achille aura atteint le point T_0 (point de départ de la tortue) l'animal sera en T_1 ; quand Achille sera en T_1, elle sera en T_2 et ainsi de suite. On en déduit qu'Achille ne rattrapera jamais la tortue !

Mathématisation :

1) Calculer le temps mis par Achille pour arriver au point T0
2) Quand Achille arrive au point T0, la tortue est en T1. Quelle est la distance T0T1 ?
3) Essayer de prévoir le temps et les distances pour les étapes suivantes

Utilisation du tableur :

1) Dans un tableur, en étiquettes de colonnes faire afficher « point de l'axe », « temps mis par Achille pour arriver au point », « distance entre Achille et la tortue » et « durée de la course d'Achille ».
2) Que remarque-ton ?

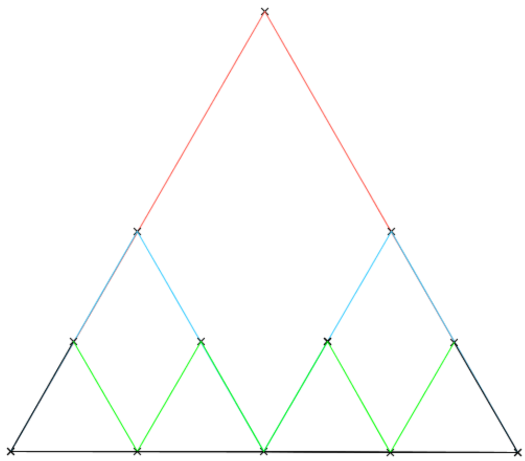
Sommes importantes de petites quantités

1) On considère un carré de côté 1 puis deux carrés de côtés $\frac{1}{2}$, puis trois carrés de côtés $\frac{1}{3}$ et ainsi de suite . Calculer à chaque étape le périmètre et l'aire de chaque carré puis la somme de ces figures. Que peut-on prévoir sur le phénomène à grande échelle ?
2) A l'aide d'un tableur, entrer le nombre de carrés, le côté de chaque carré, le périmètre, la somme des périmètres, l'aire de chaque carré et la somme des aires.
3) Que remarque-t-on ?
4) Démontrer ces deux conjectures

Quand l’intuition est fausse

Pour les deux paradoxes suivants, en utilisant un tableur, essayer de comprendre où est l’erreur.

1) On considère un triangle équilatéral ABC de côté 1. On trace le milieu des trois côtés et on construit deux nouveaux triangles équilatéraux à l’intérieur d’ABC. On



recommence cette construction.
La somme des côtés obliques de ABC est égale à 2 ; la somme des côtés obliques des deux triangles à l’intérieur est $4\times\frac{1}{2}=2$. Et ainsi de suite. Lorsqu’on poursuit indéfiniment cette construction, la ligne brisée se confond avec le côté d’ABC et on obtient donc 2 = 1 !

2) On procède comme précédemment mais en partant d’un demi-cercle de diamètre 2 et on construit une famille de demi-cercles qui se rapproche de plus en plus du diamètre du demi-cercle initial. On obtient 2 = p !