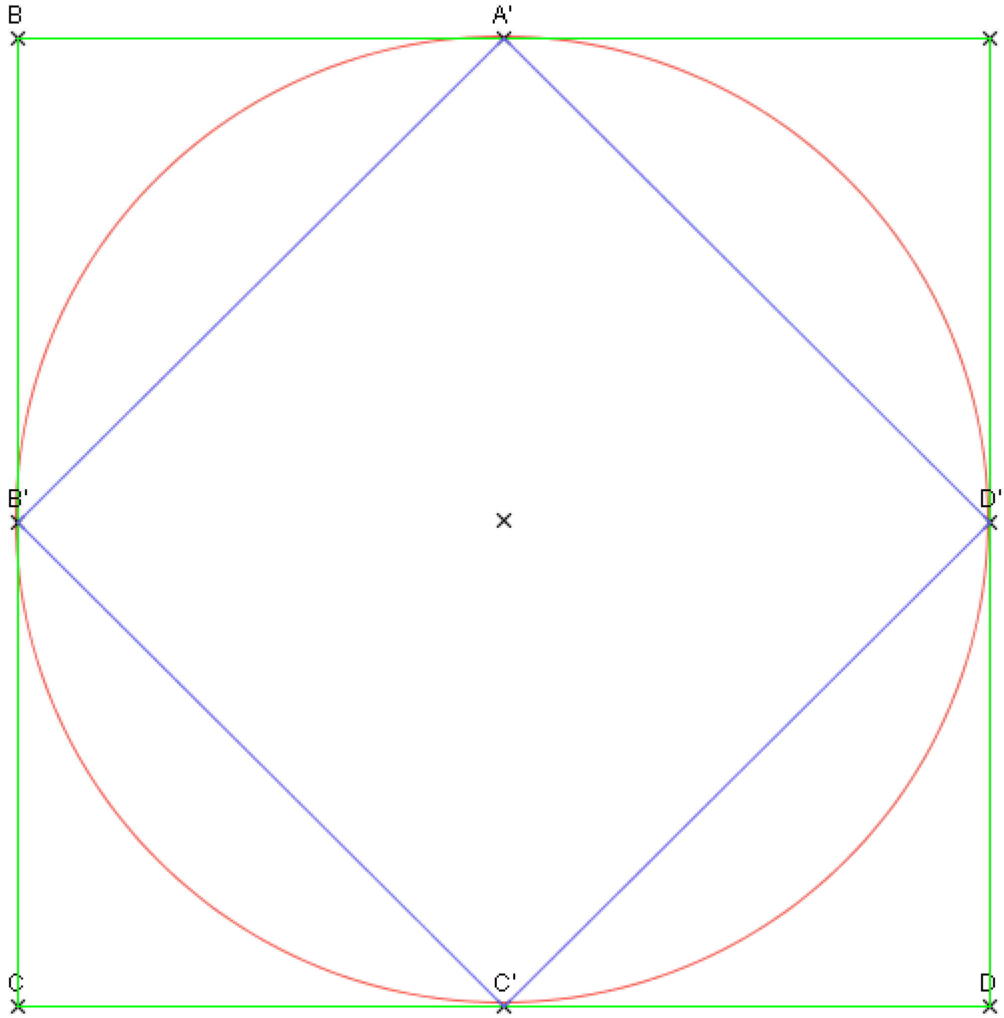
Corrigé de la méthode d'Archimède

Avec des carrés

1) Cercle
2) et carré

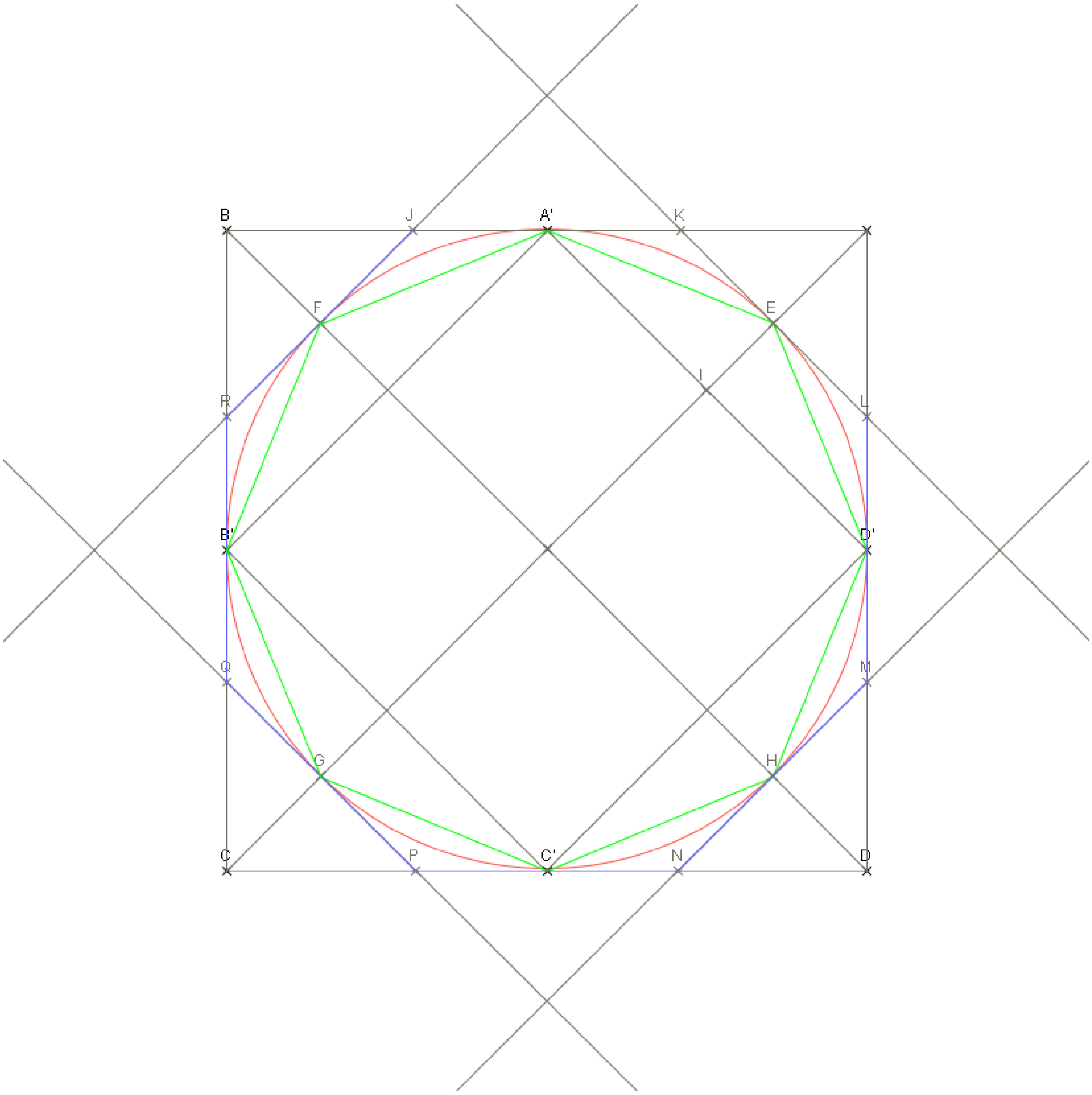


3) les diagonales d'un carré étant perpendiculaires , de même longueur et se coupant en leur milieu , le plus judicieux est de prendre pour diagonales du carré , deux diamètres perpendiculaires et dans ce cas prendre les diamètres passant par les milieux de [AB] , [BC] , [CD] et [DA] .
4) le rayon du cercle étant égal à 1 , le carré ABCD est de côté 2 et le périmètre de ABCD est 8 . Dans le triangle C'DD' on a : C'D = 1 et DD' = 1 donc C'D' = $\sqrt{2}$ (par Pythagore) donc l'aire du carré inscrit est $4\sqrt{2}$.
5) on a $4\sqrt{2} \leq 2p \leq 8$ donc $2\sqrt{2} \leq p \leq 4$ autrement dit $2{,}82 \leq p \leq 4$

Avec des octogones

1)

Corrigé de la méthode d'Archimède



Les droites (OA) , (OB) , (OC) et (OD) sont les axes de symétrie du carré . Donc IA' = ID' et donc A'E = ED' . On montre ainsi que tous les côtés sont égaux .

2) IE = $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (rayon – côté du petit carré) et IA' = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc par Pythagore :

A'E² = $\frac{1}{2}+(1-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 2-\sqrt{2}$ donc A'E = $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ et le périmètre de l'octogone est donc : $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$

3) Voir figure
4) Les points d'appui des tangentes sont deux à deux images par la symétrie de centre O et la symétrie conserve les distances .
5) AE = $\sqrt{2}-1$ car AE = ½ diagonale du grand carré – rayon du cercle . De plus AEL est un triangle rectangle en E car la tangente en E est perpendiculaire au rayon (OE) et $E\hat{A}L = 45°$ car (OE) est la bissectrice de l'angle droit du grand carré . On a donc :

$\tan 45° = \frac{EL}{AE}$ donc EL = $AE \times \tan 45° = AE \times 1 = \sqrt{2} - 1$ et donc KL = 2 ($\sqrt{2} - 1$) et le périmètre de l'octogone circonscrit est 16 ($\sqrt{2} - 1$) .

6) On a donc : $4\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \leq \pi \leq 8\left(\sqrt{2} - 1\right)$ c'est-à-dire $3{,}06 \leq \pi \leq 3{,}31$