Corrigé quadratures

Lunules d'Hippocrate

Soit a côté du carré, alors l'aire du triangle ADC est $\frac{a^2}{2}$

L'aire de la lunule correspond en fait à l'aire du demi-disque de diamètre [AC] à laquelle on enlève l'espace resté blanc entre le triangle et l'arc de cercle.
Or cet espace blanc c'est l'aire du quart de disque de centre D privé de l'aire du triangle ADC.
Calculons AC : c'est la diagonale du carré donc par Pythagore : $a\sqrt{2}$

D'où, l'aire de la lunule : $\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{4}\times\pi\times\left(a^2\right)-\frac{a^2}{2}\right]=\frac{\pi a^2}{4}-\frac{\pi a^2}{4}+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$

Lunules de Léonard de Vinci

Première situation

On considère que le côté du carré est a.
Aire d'une lunule = aire du demi-disque – (aire du disque – aire carré)/4

Aire d'une lunule = $\frac{1}{2}\pi\frac{a^2}{4}-\left[\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\pi-a^2\right]\times\frac{1}{4}=\frac{a^2}{4}$

Puisqu'il y a quatre lunules identiques, la somme des aires des lunules est a², c'est aussi l'aire du carré.

Deuxième situation

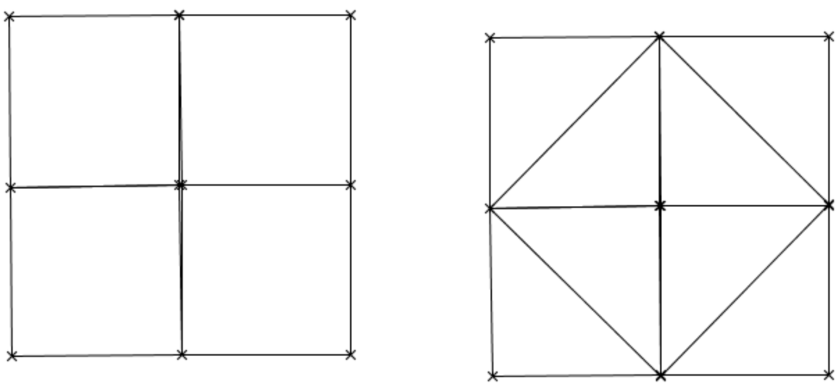
Pour avoir la somme des aires des lunules, on enlève à la somme des aires des demi-disques de diamètres respectifs [BC] et [AB], la différence de l'aire du demi-disque de diamètre [AC] et du triangle rectangle ABC.
Soit AB = c et BC = a.

Somme des aires des lunules = $\frac{1}{2}\times\pi\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)-\left[\pi\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2-\frac{ca}{2}\right]=\frac{ca}{2}$

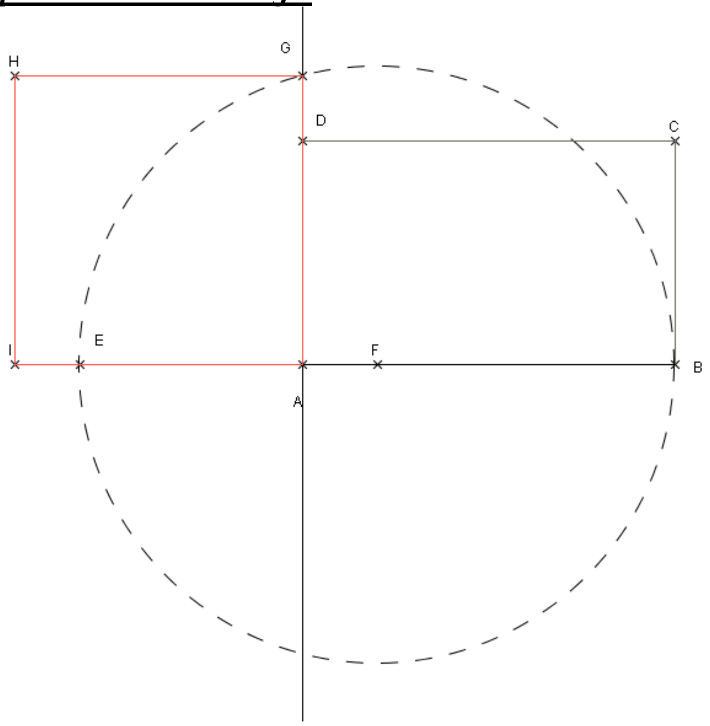
C'est aussi l'aire du triangle ABC

Dupliquer un carré

On trace un carré quelconque que l'on reproduit 4 fois comme sur la figure. On trace alors le carré intérieur. Son aire est égale au double du carré initial.



La quadrature du rectangle



Soit AB = a et BC = b. Aire (ABCD) = ab.
Calculons AG

On a AE = AD et F milieu de [EB]. Donc, EB = EA + AB = a + b et EF = EG = $\frac{a+b}{2}$

AF = AB – FB = $a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$

Par Pythagore dans AFG : AG² = $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$ on a donc : aire de (AGHI) = ab.