Fiche méthode d'analyse d'un énoncé de géométrie

Introduction à cette fiche

Cette fiche voit le jour car vous me la réclamez beaucoup !
Ma première réponse quand vous m'en avez parlé était qu'un exercice de géométrie , c'est totalement différent à chaque fois !
J'ai essayé dans cette fiche de vous donner les grandes lignes pour démarrer un exercice de géométrie mais il n'y a pas de recette !
Pour réussir en géométrie , il faut connaître parfaitement son cours et il faut s'entrainer énormément : plus vous ferez d'exercices et plus ils vous sembleront faciles !
Donc courage , seul votre travail vous permettra de progresser .

Méthode

1) Apprendre parfaitement son cours
2) Faire une figure claire , codée et complétée au fur et à mesure
3) Utiliser des couleurs pour faire apparaître des figures clés
4) Dresser la liste des définitions ou théorèmes qui nous mènent vers la réponse
5) Tirer les conclusions immédiates des figures clés au brouillon
6) Reprendre les questions de l'énoncé , regarder si les conclusions trouvées à l'étape 5 peuvent y répondre , sinon , penser à toutes les méthodes à notre disposition pour montrer ce qu'on veut .

Faire une figure

Ne pas hésiter à faire la figure seule sur une feuille à part .
Prendre de la place pour la faire : plus elle est grande , plus elle est claire
Mettre les traits de construction en pointillés : ils encombrent moins la figure
Ne pas hésiter à utiliser des couleurs pour faire apparaître des propriétés mais trop de couleurs et on ne voit plus rien !

Des fiches méthodes par type de démonstration

Il est intéressant de dresser la liste de toutes les méthodes qui existent pour montrer une propriété . Ensuite , devant une question , on élimine avec l'énoncé celles qui ne peuvent pas être utilisées . Puis , on se focalise sur celle qui semble la mieux adaptée .

Exemple :

Méthodes pour montrer que deux droites sont parallèles

- Elles sont perpendiculaires à la même droite
- Réciproque de Pythagore
- Réciproque de Thalès
- Réciproque de la droite des milieux
- Elles sont images par une transformation de deux droites parallèles
- L'une est l'image de l'autre par une translation ou par une symétrie centrale

…

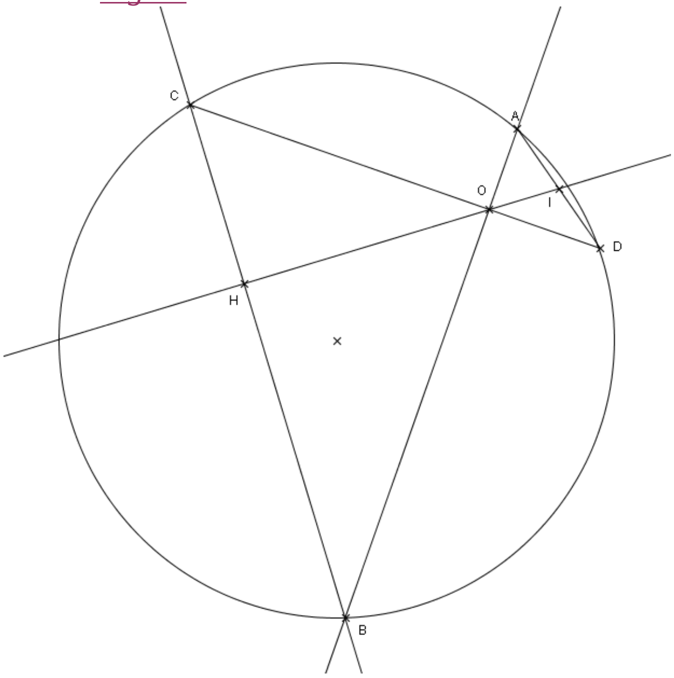
Analyse d'un énoncé à partir d'un exemple facile

- *Enoncé*

Soit [AB] et [CD] deux cordes perpendiculaires d'un même cercle . Leur point d'intersection est noté O . Soit I le milieu de [AD] . Les droites (OI) et (CB) se coupent en H .
Montrer que (OI) et (CB) sont perpendiculaires

Fiche méthode d'analyse d'un énoncé de géométrie

- *Figure*



- *Lien entre énoncé et figure*

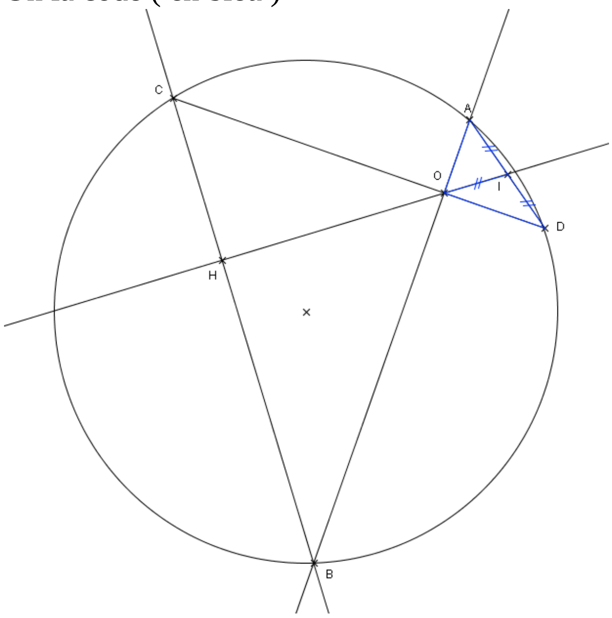
On veut montrer que deux droites sont perpendiculaires ; pour cela on a les méthodes suivantes à notre disposition :

  - Deux parallèles et une perpendiculaire (on ne voit pas de parallèles ! donc abandon)
  - Triangle dans un cercle
  - Réciproque de Pythagore (pas de distance donc abandon !)
  - Un angle égal à 90°

On a donc deux idées possibles
Regardons ce que la figure peut nous donner de plus

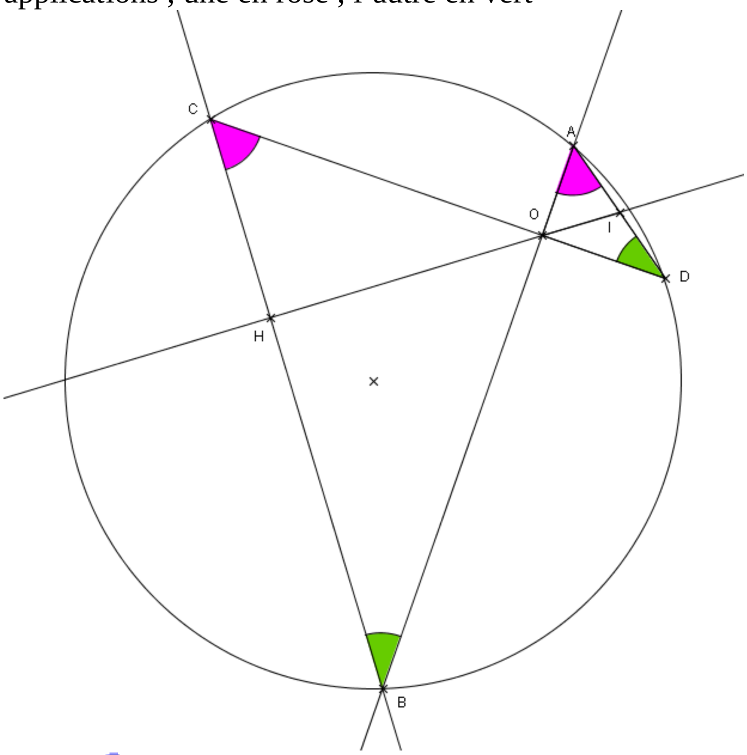
- *Analyse de la figure pour faire apparaître des figures clés*
  - *Première étape*

On a un petit triangle rectangle et un milieu : figure de la médiane relative à l'hypoténuse
On la code (en bleu)



Deuxième étape

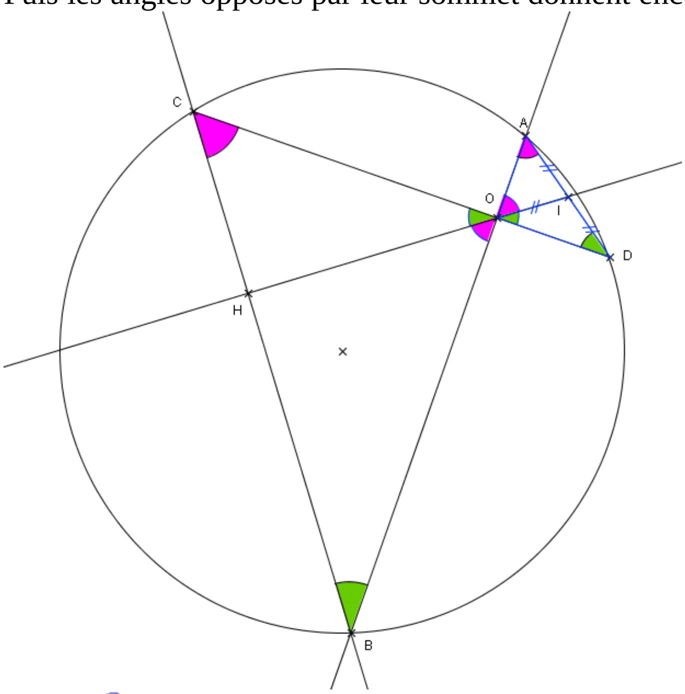
On a un cercle , on cherche des angles , on pense à l’angle inscrit : on en voit deux applications , une en rose , l’autre en vert



Troisième étape

Puisqu’on a des triangles isocèles (avec le codage bleu de la première étape) , on peut trouver de nouvelles égalités d’angles

Puis les angles opposés par leur sommet donnent encore de nouvelles égalités d’angles



Quatrième étape

On voit apparaître des angles suffisants pour déterminer l’angle H !

Rédaction finale

Tout ceci était une recherche au brouillon : maintenant , rédigeons !

- Par le théorème de l'angle inscrit , on peut dire que $B\hat{C}D = B\hat{A}D$ et $C\hat{B}A = C\hat{D}A$
- De plus , le triangle OAD est rectangle en O et I est le milieu de [AD] donc par la propriété de la médiane relative à l'hypoténuse , OI = IA = ID .
  On a donc deux triangles isocèles : OID qui nous donne $I\hat{O}D = I\hat{D}O$
  AOI qui nous donne $I\hat{O}A = I\hat{A}O$
  Et puisque OAD est rectangle en O , on a aussi $A\hat{O}I + I\hat{O}D = 90°$
- Par les angles opposés par le sommet , on a aussi : $H\hat{O}B = A\hat{O}I$
  Et puisque $H\hat{B}O = C\hat{B}A = C\hat{D}A = O\hat{D}I$, on a alors
  $H\hat{B}O + H\hat{O}B = I\hat{D}O + A\hat{O}I = 90°$ et par conséquent $B\hat{H}O = 90°$

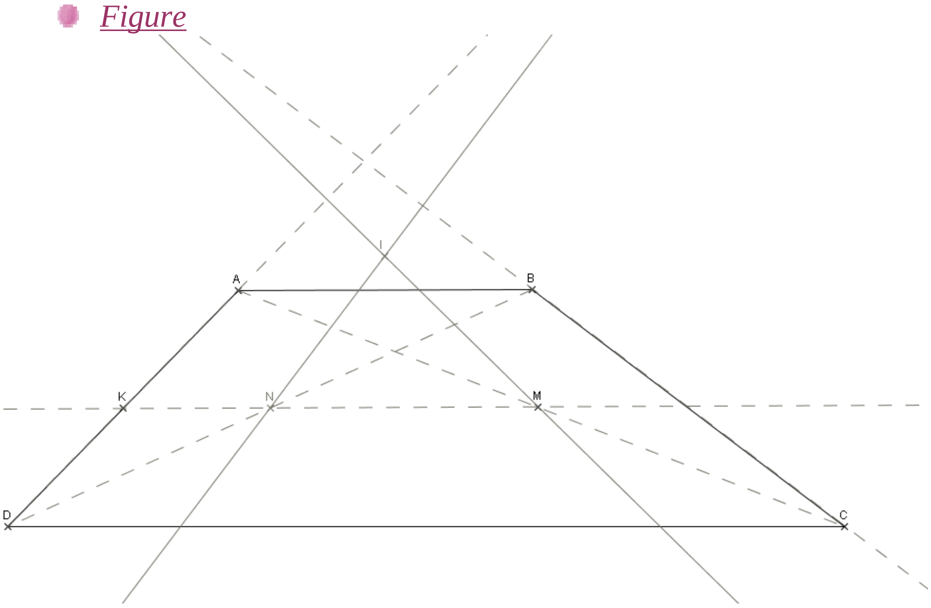
Astuce : avant de rédiger , le faire avec les couleurs (rose + vert = 90° …) et après passer aux lettres !

Analyse d'un énoncé à partir d'un exemple de difficulté plus importante

Enoncé

Soit ABCD un trapèze . Soit K le milieu de [AD] . On trace la parallèle à (AB) passant par K . Elle recoupe réciproquement [AC] et [BD] en M et N . On trace la perpendiculaire à (AD) passant par M et la perpendiculaire à (BC) passant par N . Ces deux droites se coupent en I . Montrer que I appartient à la médiatrice de [AB]

Figure



Réflexions sur l'énoncé

Cette partie se fait au brouillon

On veut montrer que I est sur la médiatrice de [AB]

Pour la médiatrice , on a deux définitions :

- Points équidistants
- Droite perpendiculaire passant par le milieu

Dans l'énoncé , beaucoup de parallèles et de perpendiculaires mais pas de distances : on va vers la deuxième définition

Fiche méthode d'analyse d'un énoncé de géométrie

Pour montrer que deux droites sont perpendiculaires :

- Deux parallèles et une perpendiculaire (ce n'est pas ce qui manque ici !)
- Triangle dans un cercle (pas de cercle ici , donc abandon !)
- Réciproque de Pythagore (pas de distance donc abandon !)
- Un angle égal à 90° (pas d'angle donc abandon !)

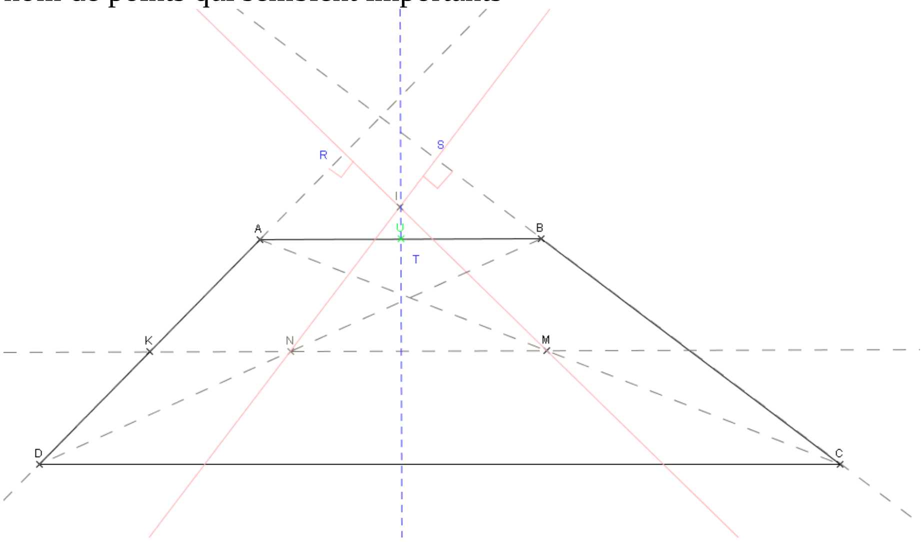
…

On essaie donc de trouver deux droites parallèles dont l'une serait perpendiculaire à une troisième

Tiens , on a un milieu et une parallèle , et si on regardait de plus près la figure avec en tête le théorème des milieux ?

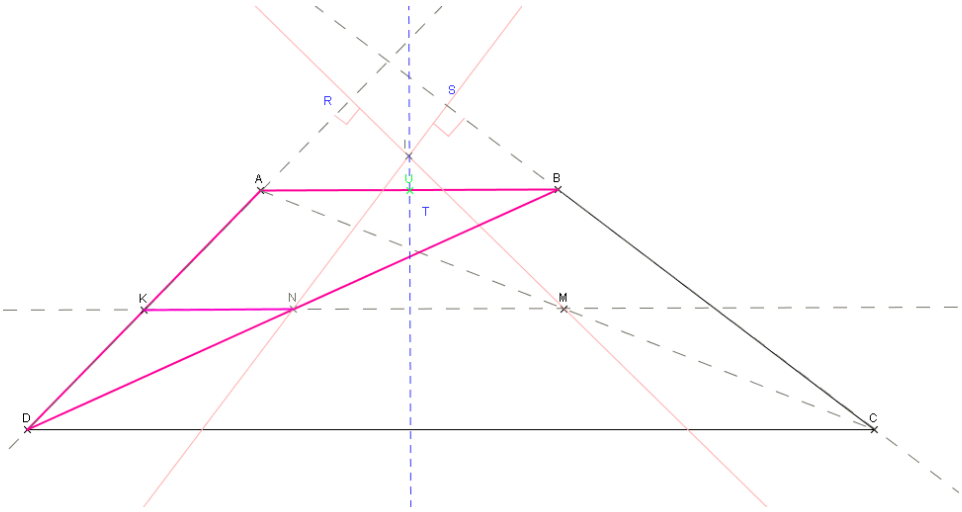
- *Analyse de la figure pour faire apparaître des figures clés*
  - *Première étape*

On met les codages , on fait apparaître la médiatrice de [AB] qui nous intéresse . On ajoute le nom de points qui semblent importants



- *Deuxième étape*

On a un milieu et une parallèle : on pense au théorème de la droite des milieux .

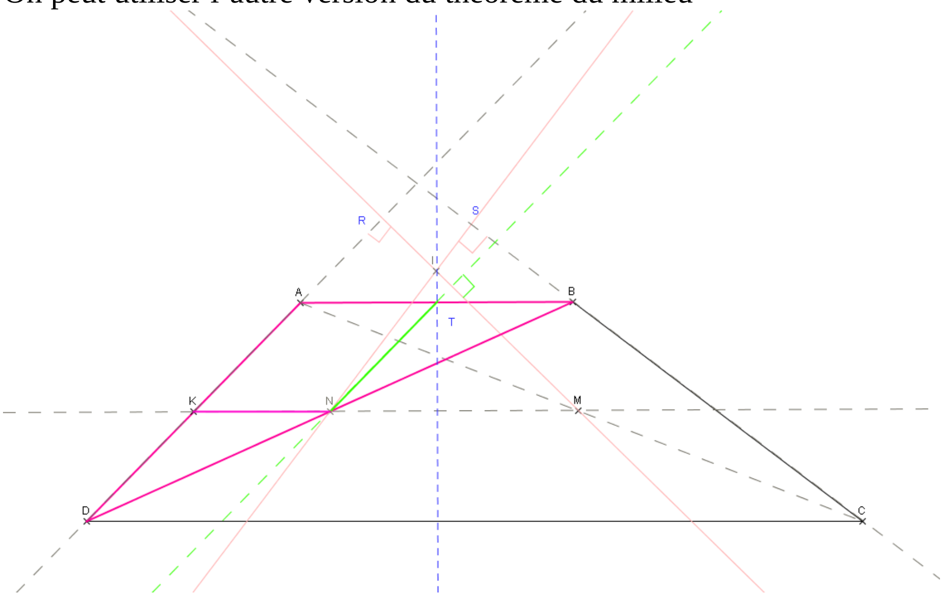


On a dans le triangle ADB , K milieu de [AD] , la parallèle à (AB) passant par K coupe donc [DB] en son milieu par le théorème des milieux .

N est donc le milieu de [BD]

Troisième étape

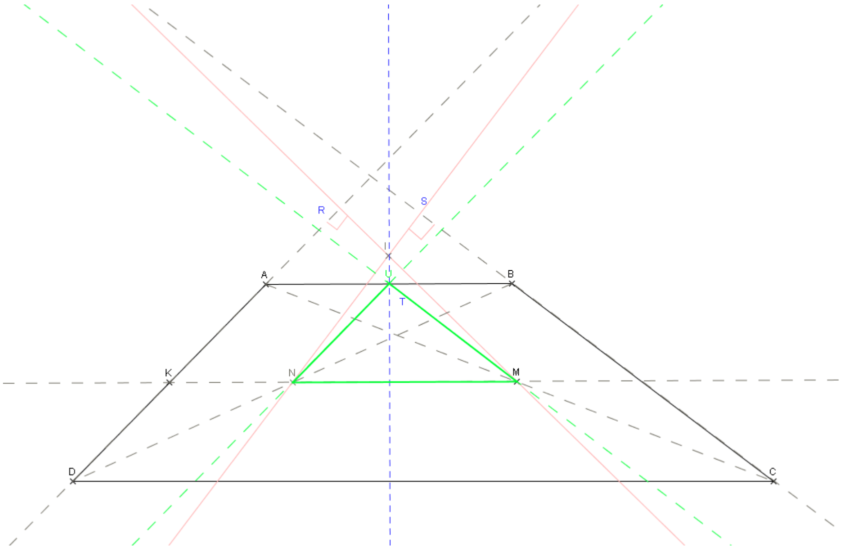
N est milieu , on a besoin du milieu de [AB] : T
On peut utiliser l'autre version du théorème du milieu



N milieu de [BD] , T milieu de [AB] donc par le théorème des milieux : (TN) parallèle à (AD)
Mais puisque (AD) est perpendiculaire à (IM) alors (IM) et (TN) sont perpendiculaires

Quatrième étape :

On voit une certaine répétition dans les constructions et donc une certaine répétition possible des raisonnements



Par le même raisonnement , on peut dire que (IN) et (TM) sont perpendiculaires

Recherche d'un lien avec la question de l'énoncé

Pour montrer qu'une droite est une médiatrice , on peut :
- Montrer qu'elle passe par le milieu du segment et qu'elle lui est perpendiculaire
- Montrer que deux de ses points sont à égale distance des extrémités du segment

Ici , on a placé T le milieu de [AB] : il faudrait montrer que (AB) est perpendiculaire à (IT)
Pour montrer qu'une droite est perpendiculaire à une autre , on peut montrer que l'une est hauteur dans un triangle où l'autre est côté opposé
On a vu dans les étapes précédentes que I est l'intersection de deux droites (IM) et (IN) et ces deux droites sont perpendiculaires à des côtés qui pourraient être ceux d'un triangle

Partons dans cette voie :
Dans le triangle TMN , les droites (IM) et (IN) sont des hauteurs et I est l’orthocentre de TMN .
Alors , la droite (IT) est la troisième hauteur : elle est perpendiculaire à (MN)
Or (MN) est parallèle à (AB) donc (IT) est perpendiculaire à [AB] et passe par son milieu : c’est la médiatrice de [AB]

- *Rédaction finale*

Tout ce qu’on vient de faire est une recherche au brouillon ; maintenant , rédigeons !

- Dans le triangle ADB , K milieu de [AD] , la parallèle à (AB) passant par K coupe donc [DB] en son milieu par le théorème des milieux ce qui entraine que N est le milieu de [BD] .
  Posons T le milieu de [AB] , alors toujours par le théorème de la droite des milieux dans le triangle ADB , (TN) est parallèle à (AD)
  On sait par construction que (AD) est perpendiculaire à (IM)
  Donc (TN) est perpendiculaire à (IM) .
- En utilisant le même raisonnement dans le triangle ABC , on montre que (TM) est parallèle à (BC) et puisque (BC) perpendiculaire à (IN) alors (TM) et (IN) sont perpendiculaires .
- Travaillons maintenant dans le triangle MNT , (TM) perpendiculaire à (IN) donc (IN) hauteur . De même , (TN) perpendiculaire à (IM) entraine (IM) hauteur .
  (IM) et (IN) se coupent en I donc I orthocentre de TMN .
  La droite (TI) est donc la troisième hauteur de ce triangle et coupe donc (MN) perpendiculairement .
  Puisque (MN) est parallèle à (AB) alors (TI) coupe [AB] perpendiculairement en son milieu : c’est la médiatrice de [AB]