Corrigé exercices en vrac

Exercice 1

1) $(x+2)^2-3(x+1)=x^2+4x+4-3x-3=x^2+x+1$
2) $(x+1)^3-6x=(x+1)^2(x+1)-6x=(x^2+2x+1)(x+1)-6x=x^3+2x^2+x+x^2+2x+1-6x$
   $=x^3+3x^2-3x+1$ et de plus
   $x^3+2x^2-7x+1+x(x+4)=x^3+2x^2-7x+1+x^2+4x=x^3+3x^2-3x+1$; on a donc
   bien $x^3+2x^2-7x+1+x(x+4)=(x+1)^3-6x$
3) $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=a^2c^2+2acbd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$
   $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$; on a bien :
   $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

Exercice 2

1) f(x) = $(x+3)^2-25$ = $x^2 + 6x + 9 - 25 = x^2 + 6x - 16$;
   de plus (x – 2) (x + 8) = $x^2 - 2x + 8x - 16 = x^2 + 6x - 16$ = f(x)
2) Pour résoudre f(x) = 0 , on choisit f(x) = (x – 2) (x + 8) car ainsi on obtient une équation produit : (x – 2) (x + 8) = 0 si x = 2 ou si x = - 8 donc S = $\{-8;2\}$.
   Pour résoudre f(x) = 11 , on choisit f(x) = $(x + 3)^2 - 25$ ce qui donne :
   $(x + 3)^2 - 25 = 11$ qui équivaut à $(x + 3)^2 - 25 -11 = 0$ c'est-à-dire $(x + 3)^2 - 36 = 0$
   on factorise en utilisant $a^2 - b^2$ et on obtient : [(x + 3) – 6][(x + 3) + 6] = 0 soit
   (x – 3)(x + 9) = 0 et donc x = 3 ou x = - 9 d'où : S = $\{-9;3\}$.
   Enfin, pour résoudre f(x) = - 16 on choisit f(x) = $x^2 + 6x - 16$ car on obtient :
   $x^2 + 6x -16 = - 16$ ce qui équivaut à $x^2 + 16 x = 0$ soit x(x+16) = 0 donc x = 0 ou
   x = - 16 d'où S = $\{-16;0\}$

Exercice 3

Faire un petit schéma pour visualiser la situation

Le volume de la bille est : $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times 9^3=972\pi$ cm^3

Soit h la hauteur de l'eau versée au départ ; volume d'eau : c'est un cylindre de rayon 9 cm et de hauteur h donc : $\pi R^2 h=\pi\times 81h=81h\pi$

De plus, l'eau recouvre la bille donc le volume de la bille plus le volume d'eau correspond à un cylindre de rayon 9 cm et de hauteur 18 cm car la hauteur correspond au diamètre de la bille : 1458π .

On a donc l'équation : $972\pi+81\pi h=1458\pi$ donc $81h=486$ et donc h = $\frac{486}{81}=6$ cm .

Exercice 4

1) Soit x la distance OM . Alors par Pythagore MN = x $\sqrt{2}$ donc l'aire de MNPQ est égale à $2x^2$. On doit donc résoudre : $2x^2 = \frac{a^2}{2}$ où a représente le côté de ABCD. On cherche donc $4x^2 = a^2$ soit : (2x – a) (2x + a) = 0 donc x = $\frac{a}{2}$ car x étant une longueur ne peut pas être négative . Donc la distance OM doit être égale à la moitié du côté du carré ABCD , c'est-à-dire qu'il faut placer M en J .

2) Par le même raisonnement et avec les mêmes notations on doit résoudre : $16x^2 = a^2$ donc en factorisant : $(4x – a)(4x + a) = 0$ soit $x = \frac{a}{4}$. On doit donc placer M à la moitié de [OJ] .

Exercice 5

1) On appelle x la longueur de la piscine . On va utiliser la formule $vitesse = \frac{distance}{temps}$.
Soit v la vitesse de Paul et v' celle de Virginie . Lorsqu'ils se croisent , le temps mis par l'un et par l'autre est le même mais la distance est différente . Faire un schéma pour visualiser la situation . La distance de Virginie est 5 m et celle de Paul est x – 5 ; on obtient donc l'équation : $\frac{x-5}{v} = \frac{5}{v'}$. Pour le deuxième croisement , par le même raisonnement , en tenant compte du fait que Paul et Virginie ont déjà parcouru une longueur de piscine on obtient l'équation : $\frac{x+2,5}{v'} = \frac{2x-2,5}{v}$; en utilisant ces deux résultats : $v' (x – 5) = 5 v$ (*) et $v (x + 2,5) = v' (2x – 2,5)$ d'où : $v (x + 2,5) = \frac{5v}{x-5}(2x-2,5)$ et en mettant au même dénominateur : $x^2 - 12,5 x = 0$ d'où $x(x – 12,5) = 0$ les solutions sont donc x = 0 et x = 12,5 ; on garde donc pour la longueur de la piscine 12,5 mètres .
2) La vitesse est la même que pour la question 1 , donc 7,5 v' = 5 v en remplaçant x par 12,5 dans (*) . De plus , il reste 32 m à parcourir pour Virginie , elle mettra donc $t = \frac{32}{v'} = \frac{32}{5v} \times 7,5 = \frac{48}{v}$. Pendant ce temps , Paul aura parcouru la distance d = v t = 48 mètres . Il y aura donc 2 m d'écart entre les deux et la gagnante est Virginie !

Exercice 6

$\frac{3+x}{7+x} = \frac{6}{7}$ soit 7 (3 +x) – 6 (7 +x) = 0 c'est-à-dire : 21 + 7x – 42 – 6x = 0 soit : x = 21 .

Exercice 7

Soit y l'âge du père et soit x l'âge du fils : y = x + 28 (car le père et le fils ont 28 ans d'écart)
On veut résoudre y = 2x soit x + 28 = 2x d'où : x = 28 . Donc le père a eu le double de l'âge de son fils quand le fils a 28 ans donc en 1921 .

Exercice 8

1) $A = \pi(x+1)^2 - \pi x^2 = 2\pi x + \pi$
2) $A = 2\pi$ si $2\pi x + \pi = 2\pi$ donc $x = \frac{1}{2}$; A = 3 si $x = \frac{3-\pi}{2\pi}$
3) $A = \pi(2x+1)$, 2x + 1 est un entier , π est un irrationnel donc A est aussi un irrationnel .

Exercice 9

1) On utilise le théorème de Thalès dans DKC : $\frac{DJ}{DK} = \frac{HJ}{KC}$ d'où : $\frac{3x}{5x} = \frac{a}{x}$ donc $a = \frac{3x}{5}$
2) On sait que x est un réel donc a est aussi un réel .

3) Pour que a soit un nombre entier il faut que x soit un multiple de 5 c'est à dire x = 5k avec k entier naturel . Pour que a soit un nombre entier premier il faut déjà que x = 5k comme précédemment donc a = 3 k c'est-à-dire que a est un multiple de 3 et le seul multiple de 3 qui soit premier c'est 3 donc k = 1 et x = 5 .
4) JHB est un triangle rectangle en H et JB = x et HJ = a donc par Pythagore :

   HB² = JB² - HJ² c'est-à-dire HB² = $x^2 - \left(\frac{3x}{5}\right)^2 = \frac{25x^2 - 9x^2}{25} = \frac{16x^2}{25}$ donc

   HB = $\frac{4}{5}x$ = HA par le même calcul . et donc AB = $\frac{8}{5}x$.
5) Le nombre b est entier si x est un multiple de 5 par contre b n'est jamais un nombre entier premier car il sera toujours un multiple de 8 qui n'est pas premier.