Fiche méthode sur la forme canonique

Rappels sur les identités remarquables

Pour réussir à mettre une expression sous forme canonique , il faut connaître et savoir manipuler parfaitement les identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemple

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

Mais il faut aussi savoir factoriser une expression donnée :

Exemple

Factoriser : $x^2 - 8x + 16$

On remarque d'abord qu'il y a un « moins » donc il s'agit de l'identité remarquable

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ensuite , on associe chacun des termes (les morceaux) :

$$x^2 - 8x + 16$$
$$a^2 - 2ab + b^2$$

on voit immédiatement que le « a » correspond au « x » . Puisque le b² correspond à 16 et que 16 = 4² alors le « b » correspond à 4 . On remarque en plus que 2ab doit correspondre à 8x donc si on divise tout par 2 , « ab » correspond à 4x . Ce qui redonne bien a = x et b = 4 .

Conclusion : $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$

Forme canonique facile

Le principe va ressembler à ce qu'on a fait dans l'exemple précédent . La seule différence est qu'on ne va pas regarder le « b² » .

En fait , une expression polynomiale (avec des x) de second degré (avec des x²) est « presque » une identité remarquable

Exemple

On vient de voir que $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$. Mais si on prend : $x^2 - 8x + 20$, l'égalité précédente ne fonctionne plus et pourtant le « début » est pareil !

Pour trouver une forme canonique , il faut deviner à quelle identité remarquable le début de l'expression correspond .

Exemple

Mettre sous forme canonique : $x^2 + 12x - 21$

D'abord , quelle identité remarquable va-t-on choisir ? On a x² + 12 x … on prend donc

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Maintenant , il faut trouver a et b .

On regarde uniquement le « début » , c'est-à-dire que pour le moment , on ne s'occupe pas du « -21 »

$$x^2 + 12x = a^2 + 2ab$$

En regardant ce qui est en rouge , on voit qu'on remplace le « a » par « x »

Fiche méthode sur la forme canonique

En regardant ce qui est en bleu , on a d'un côté 12x et de l'autre 2ab ; autrement dit « ab » doit correspondre à « 6x » et donc b = 6 !
On travaille donc avec $(x + 6)^2$.
Regardons ce qu'on obtient quand on développe :
$(x+6)^2 = x^2 + 12x + 36$
Et on veut : $x^2 + 12x - 21$
On a bien trouvé le même « début » . L'identité remarquable est donc la bonne :

$$(x+6)^2 = x^2 + 12x + 36 \ donne\ aussi :\ (x+6)^2 - 36 = x^2 + 12x$$

et donc $x^2 + 12x - 21 = (x+6)^2 - 36 - 21 = (x+6)^2 - 57$
et voilà notre forme canonique !

Exemple à trous
Mettre sous forme canonique : $x^2 - 14x + 8$

$$x^2 - 14x + \cdots = (x - \cdots)^2$$

Réponse : $x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$
On a donc : $x^2 - 14x = (x - 7)^2 - \ldots.$
Réponse : $x^2 - 14x = (x - 7)^2 - 49$
Forme canonique : $x^2 - 14x + 8 = (x - 7)^2 - 49 + \ldots$
Réponse : $(x - 7)^2 - 49 + 8 = (x - 7)^2 - 41$!

Formes canoniques plus compliquées

- *Avec des fractions :*

Exemple

$$x^2 - 5x + 7 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

- *Avec des coefficients*

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 15 &= 3[x^2 - 4x + 5] = 3[(x-2)^2 - 4 + 5] = 3[(x-2)^2 + 1] \\ &= 3(x-2)^2 + 3 \end{aligned}$$