Equations et inéquations du troisième degré

Contexte historique

Au XII ème siècle, Al-Khayyam, poète et mathématicien arabe, utilise une méthode graphique pour résoudre des équations du troisième degré .Au XVI ème siècle, Tartaglia, mathématicien italien met au point une formule algébrique ; il se confie à son ami Cardan qui s'empressa de les publier sous son nom !

Méthode de résolution d'équations du troisième degré à la façon d'Al-Khayyam

Nous nous proposons de résoudre l'équation $x^3+6x=20$

1) Vérifier que pour x non nul, cette équation équivaut à : $x^2+6=\dfrac{20}{x}$
2) Soient les fonctions f(x) = x² + 6 et g(x) = $\dfrac{20}{x}$. Donner les domaines de définition de ces deux fonctions. Comment s'appellent leurs courbes respectives ?
3) Comment peut-on résoudre l'équation $x^3+6x=20$ en utilisant ces deux courbes ?
4) Utiliser votre calculatrice ou un tableur pour donner une valeur approchée de(s) solution(s).
5) Quelle critique pouvez-vous faire sur cette méthode ?

Méthode de résolution d'inéquations du troisième degré

Nous allons utiliser le même principe pour résoudre une inéquation du troisième degré.
Enoncé du problème : une entreprise fabrique et commercialise des copies d'œuvres d'art. Les coûts de fabrication d'une quantité x de statues, toutes identiques sont données par C(x) = x^3-5x^2+9x avec x $\in$ [0;4,5] exprimé en milliers de statues ; c(x) est exprimé en milliers d'euros. Chaque copie est vendue 5 € l'unité .On veut trouver le nombre de copies à fabriquer pour que l'entreprise réalise des bénéfices.

1) Exprimer le montant v(x) de la vente en fonction de x.
2) A quelle condition l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
3) A l'aide de votre calculatrice ou d'un tableur, tracer les courbes de c et de v et répondre à la question.
4) Vérifier que v(x) – c(x) $=-x(x-1)(x-4)$. Répondre alors au problème posé par une méthode algébrique.

Résolution algébrique d'équations du troisième degré

En 1534, Tartaglia établit les formules suivantes :
L'équation $x^3+px=q$ avec p et q réels positifs, a une unique solution égale à :

$$x=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{27}}+q}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{27}}-q}{2}}$$

1) Avec cette méthode, résoudre $x^3+6x=20$.
2) Comparer ce résultat avec les résultats de la première partie
3) Développer $(1+\sqrt{3})^3$ et $(1-\sqrt{3})^3$. Conclure .

Extension historique

D'autres mathématiciens réussirent à montrer que des formules permettaient de résoudre des équations de degré 4, Ferrari, élève de Cardan en 1540 ; Evariste Galois prouva avant ses 21 ans qu'à partir du degré 5, il n'y avait pas de solutions qu'on pouvait exprimer uniquement avec des racines carrées, vers 1830.