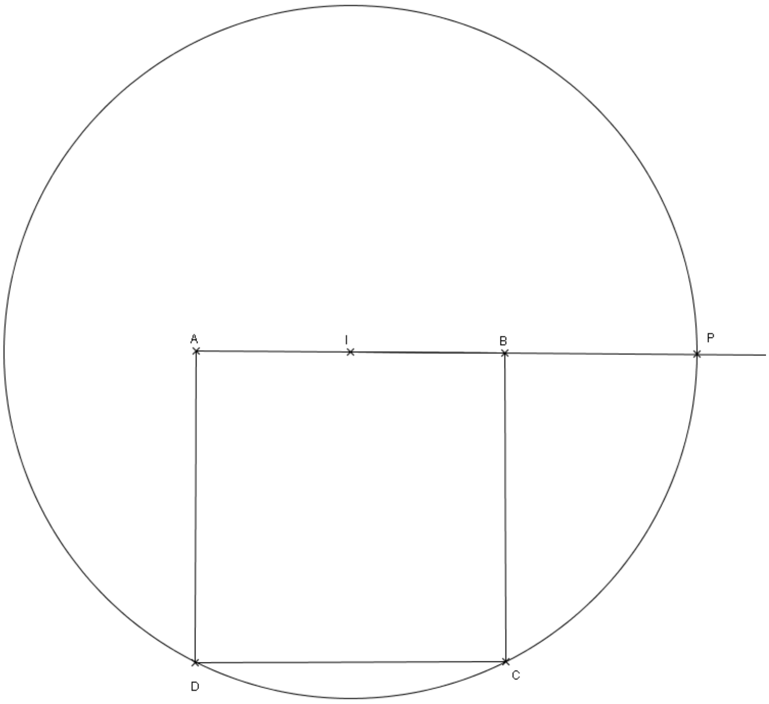
Exercice 1

Commençons par faire une figure



1) On peut déjà remarquer que IA = IB = $\frac{1}{2}$. Travaillons dans le triangle rectangle IBC et appliquons Pythagore : $IC^2 = IB^2 + BC^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$ donc $IC = \frac{\sqrt{5}}{2}$. On remarque que AP = AI + IP = AI + IC = $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2) $\frac{AP}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ car AB = 1 et

$$\frac{AB}{BP} = \frac{1}{IP - IB} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

3) $\Phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et

$$\Phi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}+2}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \Phi^2$$

4) a) Si p et q sont tous les deux des nombres pairs , alors la fraction n'est pas irréductible donc c'est contraire à l'hypothèse de travail

b) On a montré $\Phi^2 = 1 + \Phi$ donc $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p}{q} + 1$ d'où $\frac{p^2}{q^2} = \frac{pq}{q^2} + \frac{q^2}{q^2}$ et donc $p^2 - q^2 = pq$ puisque q non nul , on peut donc simplifier

c) On a p = 2k + 1 et q = 2t + 1 puisqu'ils sont impairs

Donc $pq = (2k+1)(2t+1) = 4kt + 2k + 2t + 1 = 2(2kt + t + k) + 1$ et pq est impair
D'autre part : $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ et $q^2 = 4t^2 + 4t + 1$
donc $p^2 - q^2 = 4k^2 - 4t^2 + 4k - 4t = 2(2k^2 - 2t^2 + 2k - 2t)$ et $p^2 - q^2$ est pair
Puisque $pq = p^2 - q^2$ il y a contradiction car un nombre pair ne peut pas être égal à un nombre impair
Conclusion : p et q ne peuvent pas être tous les deux impairs
d) Supposons p pair et q impair : $p = 2k$ et $q = 2t + 1$
Donc $pq = 4tk + 2k$ pair
$p^2 - q^2 = 4k^2 - 4t^2 - 4t - 1$ impair
Contradiction également
Et par symétrie entre p et q , p impair et q pair est également impossible

e) Puisqu'on ne peut pas trouver p et q entiers qui vérifient $\Phi = \frac{p}{q}$, on a montré que Φ est un irrationnel

Exercice 2

$$\frac{\left(8^{n+1}+8^n\right)^2}{\left(4^n-4^{n-1}\right)^3} = \frac{\left(8^n(8+1)\right)^2}{\left(4^{n-1}(4-1)\right)^3} = \frac{8^{2n}\times 9^2}{4^{3n-3}\times 3^3} = \frac{4^{2n}\times 2^{2n}\times 3^4}{4^{3n-3}\times 3^3} = \frac{2^{2n}\times 3}{4^{n-3}} = \frac{4^n\times 3\times 4^3}{4^n} = 3\times 64 = 192$$

Autrement dit , quelque soit la valeur de n , on obtiendra toujours le même résultat

Exercice 3

1) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

2) $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{1994\times 1995} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1994} - \frac{1}{1995} = 1 - \frac{1}{1995} = \frac{1994}{1995}$

$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ comme précédemment car les fractions s'annulent deux à deux