Corrigé 12

Exercice 1

1) ABCD est un parallélogramme si et seulement si : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\begin{cases} 4 = 0 - x \\ -1 = -7 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow D(-4;-6)$$

2) Déterminons d'abord l'équation de (AC) : M(x ;y) est un point de (AC) si et seulement si $\overrightarrow{AM}(x+3;y+1)\ et\ \overrightarrow{AC}(3;-6)$ colinéaires donc (AC) : $2x + y + 7 = 0$. On a donc E(-1 ;-5)

3) Déterminons les équations des droites nécessaires :

$$(BE): -3x + 2y + 7 = 0\ ;\ (CD): x + 4y + 28 = 0$$

$$\begin{cases} x + 4y + 28 = 0 \\ -3x + 2y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + 28 = 0 \\ 14y + 91 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\dfrac{13}{2} \end{cases}$$

$$(DE): -x + 3y + 14 = 0\ ;\ (BC):\ 5x - y - 7 = 0$$

$$\begin{cases} -x + 3y + 14 = 0 \\ 5x - y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 14 = 0 \\ 14y + 63 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

4) (DE) coupe [BC] en son milieu et (BE) coupe [DC] en son milieu donc (DE) et (BE) sont des médianes de BCD et puisqu'elles se coupent en E , E est le centre de gravité de BCD .

Exercice 2

1) On a : 11 x – 10 = 0 ; c'est l'équation d'une droite verticale donc Dm est une droite verticale .
2) Dm est une droite oblique si et seulement si 3m + 2 non nul et 1 – 4m non nul donc m doit être différent de ¼ et de -2/3 .
3) Il faut que :

$$\frac{3m+2}{4m-1} = 2 \Leftrightarrow 3m + 2 = 8m - 2 \Leftrightarrow 5m = 4 \Leftrightarrow m = \frac{4}{5}$$

4) On va résoudre un système pour déterminer l'intersection de Dm et de Dn :

$$\begin{cases} (3m+2)x + (1-4m)y + 2m - 3 = 0 \\ (3n+2)x + (1-4n)y + 2n - 3 = 0 \end{cases}$$

On multiplie la première ligne par (3n+2) et la deuxième par (3m+2) et on soustrait :

$$[(3n+2)(1-4m) - (1-4n)(3m+2)]y + (3n+2)(2m-3) - (2n-3)(3m+2) = 0$$

$$11(n-m)y + 13(m-n) = 0$$

$$y = \frac{13(n-m)}{11(n-m)} = \frac{13}{11}$$

On remplace maintenant pour trouver x :

$$(3m+2)x + (1-4m)\frac{13}{11} + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 - \frac{13}{11} - 2m + \frac{52m}{11}}{3m+2} = \frac{20+30m}{11(3m+2)}$$
$$= \frac{10}{11}$$

Puisque les valeurs de x et de y ne dépendent pas de m , cela veut dire que toutes les droites ont un point commun .

Exercice 3

Le problème dans cet exercice est qu'on ne peut pas tracer ABC sans avoir A'B'C' et réciproquement ; on va donc chercher une astuce . On cherche les coordonnées des points sans dessin :

A'(0,0) , B'(1,0) , C'(0,1) . Puisque A' milieu de [CC'] alors C(0,-1) . De même B' milieu de [AA'] donc A(2,0) et C' milieu de [BB'] donc B(-1,2) .

Corrigé 12

1) Equation de (AA') : y = 0 ;

Equation de (BC) : M(x ;y) sur (BC) si $\overrightarrow{BM}(x+1; y-2)\ et\ \overrightarrow{BC}(1;-3)$ colinéaires donc

$$(BC) :\ 3x + y + 1 = 0$$

On a donc :

$$E\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$$

2) On a :

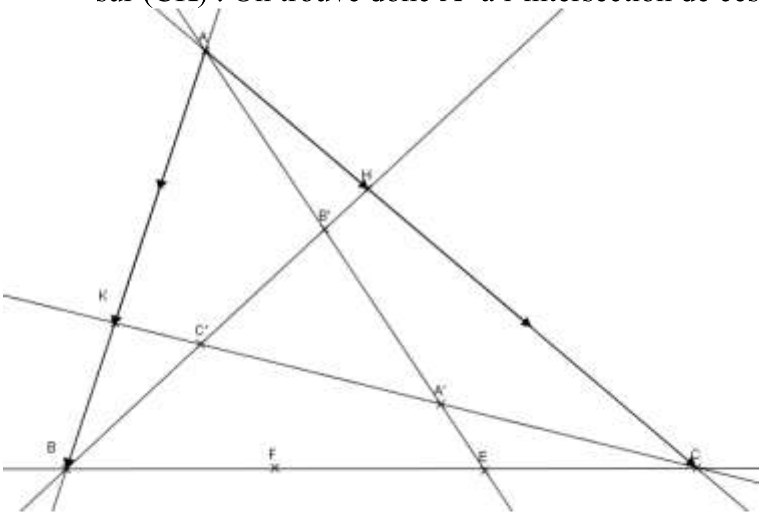
$$F\left(-\frac{2}{3}; 1\right)$$

3) Coordonnées du milieu de [CF] :

$$\left(-\frac{1}{3}; 0\right) :\ c'est\ E$$

4) On a démontré que F est le milieu de [EB] et E celui de [CF] donc en partageant le segment [BC] en tiers , on a en partant de B , au premier tiers F , puis au deuxième tiers E .

5) On trace un segment quelconque [BC] puis on le découpe en tiers . On place E et F . On fait de même avec [AB] et [AC] . Puis on trace les droites (AE) , (BH) et (CK) . On a dit que (AA') et (BC) se coupent en E et de plus , A' milieu de [CC'] donc A' sur (CK) . On trouve donc A' à l'intersection de ces deux droites . Idem pour B' et C' .



Exercice 4

1) Coordonnées de G_1 et G_2

$$G_1\left(\frac{3}{2}; 20\right)\ et\ G_2\left(\frac{11}{2}; \frac{107}{4}\right)$$

Equation de (G_1G_2) :

$$\overrightarrow{G_1M}\left(x-\frac{3}{2}; y-20\right)\ et\ \overrightarrow{G_1G_2}\left(4; \frac{27}{4}\right)\ colinéaires :\ \frac{27}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right) - 4(y-20) = 0$$

$$(G_1G_2) :\ 54x - 32y + 559 = 0$$

2) En 2010 le rang est égal à 8 donc x = 8 et en utilisant le 1) , y = 30,97 donc le chiffre d'affaires est environ 31 millions d'euros

3) On doit résoudre :

$$\frac{54x + 559}{32} > 45 \Leftrightarrow 54x + 559 > 1440 \Leftrightarrow x > 16{,}31$$

Il faut donc dépasser l'année qui a le rang 17 c'est-à-dire 2019 .

Exercice 5

On a A(2,3) . Soit une équation de d : y = ax + b avec a < 0 . Et 3 = 2a + b donc b = 3 – 2a

Alors : d : y = ax + 3 – 2a . Et on obtient :

Corrigé 12

$$C\left(-\frac{3-2a}{a};0\right)\ et\ D(0;3-2a)$$
$$aire(OCB)=-\frac{(3-2a)^2}{2a}$$

On pose

$$f(x)=-\frac{(3-2x)^2}{2x}$$

Et on va chercher le minimum de f ; on entre cette fonction dans la calculatrice avec x négatif et on regarde : on obtient le minimum pour environ x = -1,5 . Il faut donc choisir le coefficient directeur environ égal à – 1,5 .

<u>Exercice 6</u>

C'est un exercice difficile et vous verrez en terminale une démonstration simple de celui-ci . Voilà ce qu'on peut faire en seconde .

Un polygone régulier à n côtés de centre O est une figure géométrique telle que chaque sommet est l'image du précédent par une rotation de centre O et d'angle 360/n .

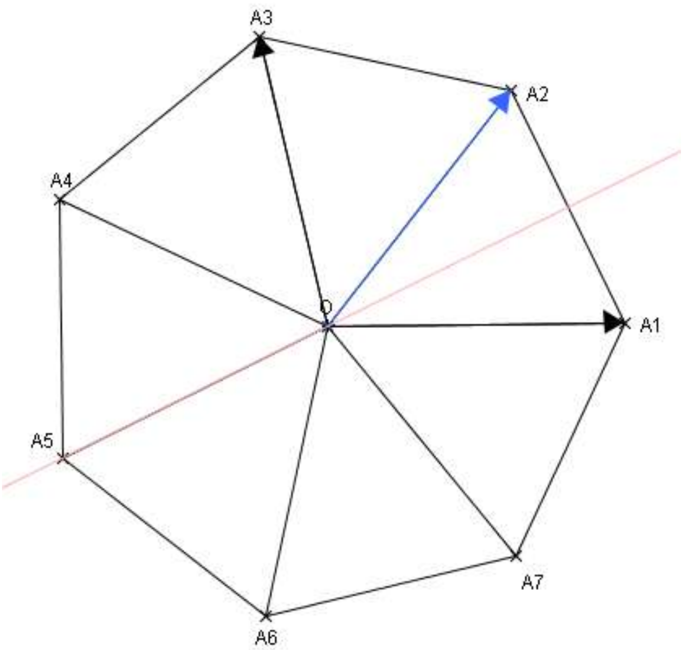
Par exemple , un carré est un polygone régulier à 4 côtés .

On peut dessiner plusieurs polygone régulier pour voir si ça marche (3, 4 , 5 et 6 côtés) et on constate que ça marche !

Essayons de démontrer

Si n est pair , alors l'angle au centre de chaque triangle AiOAi+1 est 360/n . Si on fait n/2 fois une rotation de centre O d'angle 360/n , on va retrouver un sommet du polygone puisqu'en tout on aura 180° . Donc quand n est pair , on a les sommets deux à deux diamétralement opposés et quand on ajoute les vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$ ils sont opposés deux à deux donc leur somme est nulle .

Le cas n impair est plus difficile ; pour s'aider , on fait un schéma avec un polygone régulier à 7 côtés



On va commencer par prouver qu'un diamètre qui passe par un sommet est axe de symétrie du polygone .

Soit le diamètre qui passe par Ak et notons B le point diamétralement opposé à celui-ci , alors l'angle $\widehat{A_kOB}$ vaut 180° . Mais :

$$\widehat{A_1OA_k}=\frac{360(k-1)}{n}\ et\ donc$$
$$\widehat{A_1OB}=\frac{360(k-1)}{n}-180$$
$$=\frac{360(2k-2-n)}{2n}$$
$$=\frac{1}{2}\widehat{A_1OA_{2k-1-n}}$$

C'est-à-dire que la droite (OB) est bissectrice d'un triangle formé par O et deux sommets du polygone .

Comme ce triangle est isocèle en O alors (OB) est médiatrice d'un côté du polygone . On peut généraliser à tous les côtés du polygone et donc (OB) est axe de symétrie .

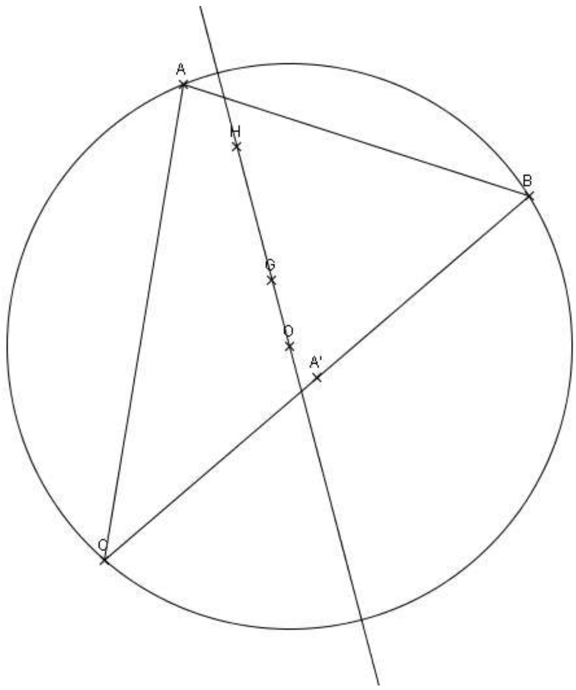
Maintenant , si on ajoute deux vecteurs , on sait que la somme correspond à la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs donc ici puisque les vecteurs sont

symétriques deux à deux par rapport à (OB) la somme de tous les vecteurs est donc un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{OB}$ ou à $\overrightarrow{OA_k}$.
Puisque le raisonnement qu'on vient de faire est valable avec tous les diamètres qui passent par un sommet , alors la somme des vecteurs est colinéaire à tous les vecteurs $\overrightarrow{OA_k}$. Pour que ce soit possible , il faut que la somme de ces vecteurs soit nulle !!!

Exercice 7

1) Par la définition d'une somme de vecteurs , AMBM' est un parallélogramme
2) AMBM' étant un parallélogramme , les diagonales se coupent en leur milieu I d'où le résultat
3) Par le résultat précédent , N' est donc le symétrique de N par rapport au milieu de [AB] donc l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle . On a donc N' sur la droite parallèle à d passant par le premier N' qu'on obtient .
4) Le point P' est donc aussi le symétrique de P par la symétrie de centre I ; P' est donc sur le cercle de diamètre [BI] .

Exercice 8



1) On a A' milieu de [BC] donc $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{MA'}$$

2) G est le centre de gravité donc il est situé aux deux tiers de la médiane [AA'] en partant de A donc $3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AA'}$

On a donc :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA'}$$
$$= \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AA'}$$
$$= 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{MG}$$

3) On a démontré que $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ pour tout point M donc on peut l'appliquer au point O

4) Soit K tel que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK}$. Or $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$ donc $\overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA}$.
On a donc : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{OA'}$

Or (OA') est perpendiculaire à (BC) puisque médiatrice donc (AK) perpendiculaire à (BC) donc (AK) est une hauteur de ABC .
On peut démontrer de la même façon que (BK) est aussi une hauteur donc K est l'orthocentre de ABC . Donc H = K

5) On a donc : $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$ donc les points O , H et G sont alignés .