Corrigé mini stages

Exercice 1

$$4+\frac{3x-63}{x^2+9}=\frac{4(x^2+9)+3x-63}{x^2+9}=\frac{4x^2+3x-27}{x^2+9}=f(x)$$
$$\frac{(4x-9)(x+3)}{x^2+9}=\frac{4x^2-9x+12x-27}{x^2+9}=\frac{4x^2+3x-27}{x^2+9}=f(x)$$

2) a) Avec la première forme : f(0) = - 3

b) Avec la troisième forme :

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{(4x-9)(x+3)}{x^2+9}=0\Leftrightarrow(4x-9)(x+3)=0\Leftrightarrow x=\frac{9}{4}\ ou\ x=-3$$

c) Avec la deuxième forme :

$$f(x)=4\Leftrightarrow 4+\frac{3x-63}{x^2+9}=4\Leftrightarrow\frac{3x-63}{x^2+9}=0\Leftrightarrow 3x-63=0\Leftrightarrow x=21$$

d) Avec la troisième forme , $x^2+9>0$ donc il suffit d'étudier le signe de (4x – 9)(x + 3) et de faire un tableau de signes :

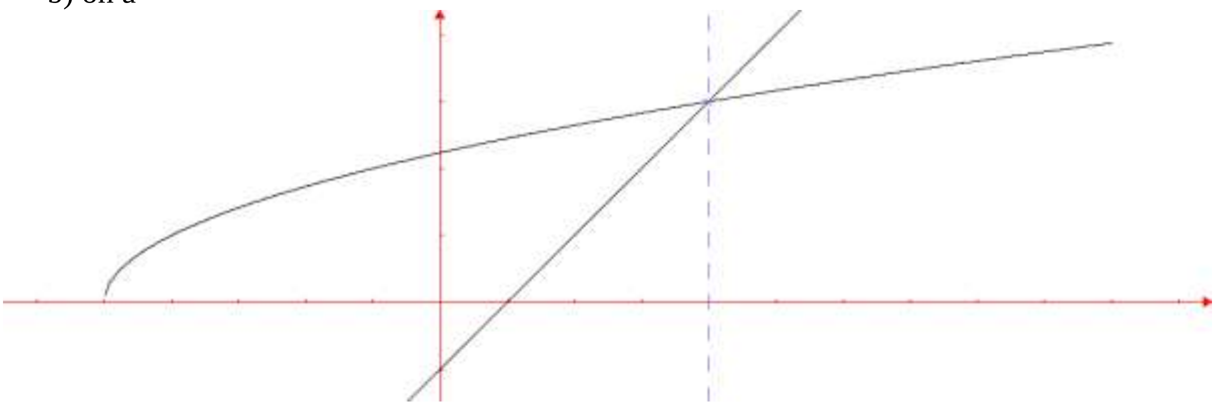
$$S=\left]-3;\frac{9}{4}\right[$$

e) Avec la deuxième forme , on a alors $3x-63\geq 0\Leftrightarrow x\geq 21\ donc\ S=[21;+\infty[$

Exercice 2

1) a) La racine est définie si et seulement si $x+5\geq 0\Leftrightarrow x\geq -5$

b) on a



c) Il semble que la solution soit x = 4

2) a) Une racine est toujours positive donc $\sqrt{x+5}\in[0;+\infty[$

b) on a

$$\sqrt{x+5}=x-1\Leftrightarrow x+5=(x-1)^2\Leftrightarrow x+5=x^2-2x+1\Leftrightarrow x^2-3x-4=0$$

Or $(x-4)(x+1)=x^2-3x-4\ donc\ (E1)\Leftrightarrow(x-4)(x+1)=0$

c) Les solutions de (E1) sont donc x = 4 ou x = - 1 .

d) On a vu dans a) que x - 1 > 0 donc x > 1 donc la seule solution est x = 4 . Conjecture validée .

Exercice 3

$$1-\frac{4}{x+3}=\frac{x+3-4}{x+3}=\frac{x-1}{x+3}$$

Si x > - 3 , alors on a :

$$\frac{4}{x+3}>0\ donc\ -\frac{4}{x+3}<0\ et\ 1-\frac{4}{x+3}<1\ donc\ \frac{x-1}{x+3}<1$$

Exercice 4

$$(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=x^6-x^5+x^5-x^4+x^4-x^3+x^3-x^2+x^2-x+x-1$$
$$=x^6-1$$

La formule précédente donne :

$$\frac{x^6-1}{x-1}=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$x=\frac{1}{2}\ donne:\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{\frac{1}{64}-1}{\frac{1}{2}-1}=-\frac{63}{64}\times(-2)=\frac{63}{32}$$

Corrigé mini stages

Exercice 5

1) On remplace a par 1 , puis par 2 , puis par 3 …

$(1+1)^2 = 1 + 2 + 1$

$(1+2)^2 = 1 + 4 + 4$

$(1+3)^2 = 1 + 6 + 9$

…

$(1+n)^2 = 1 + 2n + n^2$

On additionne : $4 + 9 + 16 + \ldots + (n+1)^2 = n + 2(1+2+3+\ldots+n) + 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$

On a donc : $(n+1)^2 - n - 1 = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$

Soit : $n^2 + n = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$ d'où le résultat

2) Idem :

$8 = 1 + 3 + 3 + 1$

$27 = 8 + 3(2) + 3(4) + 1$

$64 = 27 + 3(3) + 3(27) + 1$

…

$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$on\ additionne : \ (n+1)^3 = 1 + 3(1 + 2 + \cdots + n) + 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + n$

$(n+1)^3 - 1 - 3\dfrac{n(n+1)}{2} - n = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$

$\dfrac{(n+1)(2(n+1)^2 - 3n - 2)}{2} = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$

$\dfrac{(n+1)(2n^2 + n)}{6} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$

3) On va s'inspirer des deux questions précédentes :

$(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$

On a donc :

$2^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1$

$3^4 = 2^4 + 4(2^3) + 6(2^2) + 4(2) + 1$

…

$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

On additionne tout :

$(n+1)^4 = 1 + 4(1 + 2^3 + \cdots + n^3) + 6\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\dfrac{n(n+1)}{2} + n$

$1 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{1}{4}[(n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)]$

$1 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{1}{4}[(n+1)((n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n]$

$1 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{1}{4}[(n+1)(n^3 + n^2)] = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 6

Formule qu'on va utiliser : $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Donc $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc$

$n^2 + (n+1)^2 + n^2(n+1)^2 = (n + n + 1 + n(n+1))^2 - 2n(n+1) - 2n^2(n+1) - 2n(n+1)^2$

$= (n^2 + 3n + 1)^2 - 2n(n+1)(1 + n + n + 1) = ((n+1)^2 + n)^2 - 4n(n+1)^2$

$= (n+1)^4 + 2n(n+1)^2 + n^2 - 4n(n+1)^2 = (n+1)^4 - 2n(n+1)^2 + n^2 = ((n+1)^2 - n)^2$

Exercice 7

$$4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(4x^3 - 6x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x[2x^2(2x-3) + 2x - 3] = 0 \Leftrightarrow x(2x-3)(2x^2+1) = 0$$

$$x = 0 \ ou \ x = \frac{3}{2}$$

Pour résoudre l'inéquation , on remarque que $2x^2 + 1$ est toujours positif donc on doit juste étudier le signe de $x(2x-3)$. Avec un tableau de signes , on obtient :

$$S = \left[0; \frac{3}{2}\right]$$

Corrigé mini stages

Exercice 8

On se rappelle de la formule : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 < 0 \Leftrightarrow (2x-3)^3 < 0 \Leftrightarrow 2x - 3 < 0$ car un carré est toujours positif . Donc :

$$S = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$$

Exercice 9

1) On va procéder par identification : cherchons a , b et c tels que f(x) = ax² +bx + c

$$f(x+1) = 3x^2 + 4x + 1 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$$

$$ax^2 + (2a+b)x + a + b + c = 3x^2 + 4x + 1$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ 2a + b = 4 \\ a + b + c = 1 \end{cases} donc \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases} donc\ f(x) = 3x^2 - 2x$$

2) On doit résoudre :

$$3x^2 + 4x + 1 = 3(x-1)^2 - 2(x-1)$$

$$12x - 4 = 0\ donc\ x = \frac{1}{3}$$

Exercice 10

1) $f(x) = x^2 - 4x - 12 = (x-2)^2 - 4 - 12 = (x-2)^2 - 16$. On a donc :

$$f(x) = (x - 2 - 4)(x - 2 + 4) = (x-6)(x+2)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6\ ou\ x = -2$$

2) On a :

$$f(x) = 3x^2 - 30x + 45 = 3(x^2 - 10x + 15) = 3((x-5)^2 - 25 + 15) = 3((x-5)^2 - 10)$$

$$f(x) = 3(x - 5 - \sqrt{10})(x - 5 + \sqrt{10})$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5 + \sqrt{10}\ ou\ x = 5 - \sqrt{10}$$

3) On a :

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

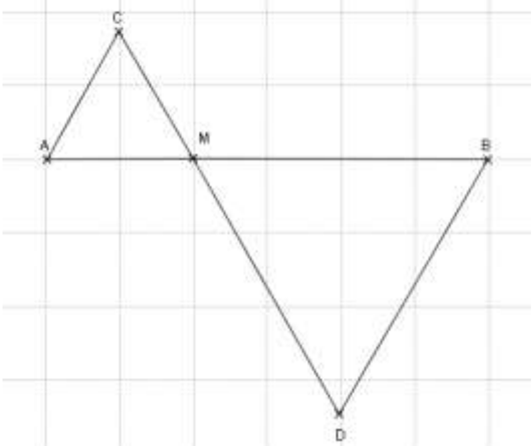
$$si\ \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} > 0\ alors\ f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\ ou\ x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Exercice 11

1) 2(x + L) = 24 donc x = 12 – L
2) La longueur doit être comprise entre 0 et la moitié du périmètre donc L est dans [0 ;12]
3) A = L (12 – L) = 12 L – L²
4) On fait un tableau de valeurs , il semble que l'aire est maximale pour L = 6
5) A = - (L² - 12 L) = - (L – 6)² + 36 . On a donc A – 36 = - (L – 6)² < 0 donc A < 36 donc l'aire est maximale si elle vaut 36 cm² c'est-à-dire pour L = 6 cm .

Exercice 12



On rappelle que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est donnée par la formule :

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ici :

$$aire(AMC) = \frac{x\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}\ et$$

$$aire(BMD) = \frac{(6-x)^2\sqrt{3}}{4}$$

Donc

Corrigé mini stages

$$aire\ totale\ = \frac{(x^2 + (6-x)^2)\sqrt{3}}{4}$$

On doit donc résoudre :

$$\frac{(x^2 + (6-x)^2)\sqrt{3}}{4} = \frac{13\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x^2 + 36 - 12x + x^2 = 26$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 10 = 0$$

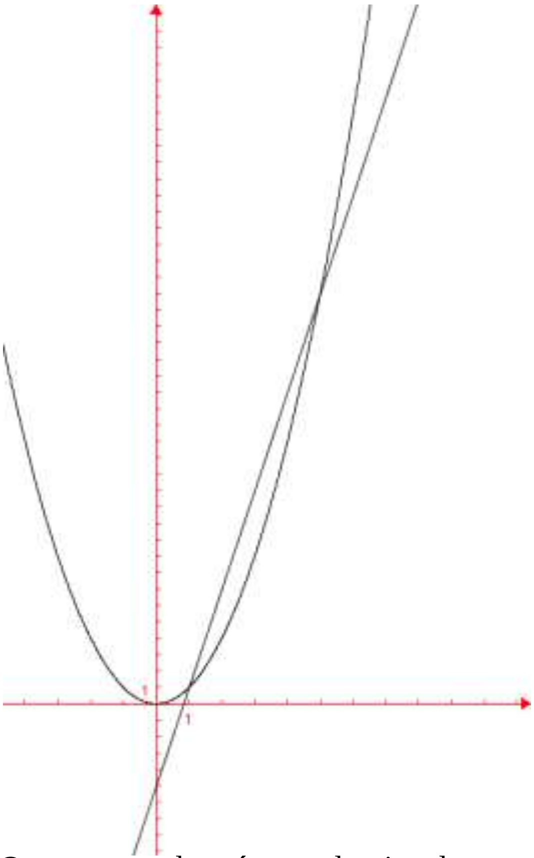
On simplifie par 2 : $x^2 - 6x + 5 = 0$

Il semble qu'il y ait deux solutions : x = 1 ou x = 5

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x-1) = 0$$

On retrouve les mêmes solutions .



Exercice 13

On remarque la présence de triangles rectangles donc Pythagore entre en scène :

$AM^2 = 1 + x^2\ donc\ TM^2 = AM^2 - 1 = x^2\ donc\ TM = x$

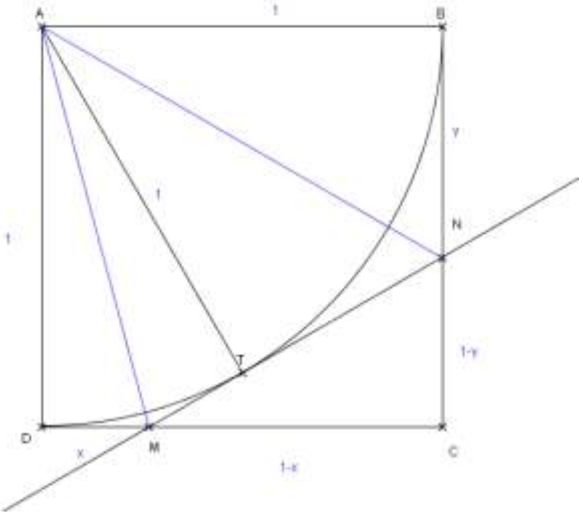
De même : $AN^2 = 1 + y^2\ donc\ TN^2 = AN^2 - 1 = y^2\ donc\ TN = y\ et\ donc\ MN = x + y$

Il faut donc maintenant exprimer y en fonction de x :

$$MN^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2\ donc\ (x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 2 - 2x - 2y + x^2 + y^2$$

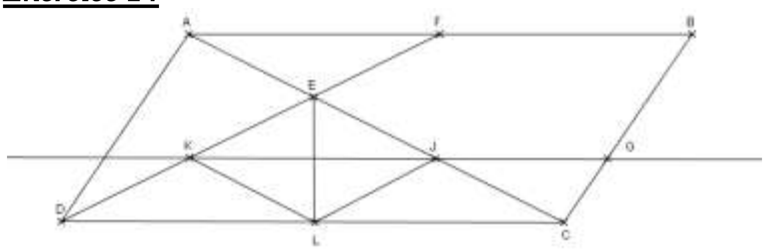
$$xy + x + y - 1 = 0$$



$$y(1+x) = -x\ + 1\ donc\ y = \frac{1-x}{1+x}\ et\ donc\ MN = \frac{x(1+x) + 1 - x}{1+x} = \frac{x^2+1}{1+x}$$

On entre cette fonction dans la calculatrice et on cherche son minimum : x = 0, 41 .

Exercice 14



1) Déterminons les coordonnées des points D , E et F : D(0 ;1) . F(1/2 ;0)

Pour le point E , on sait que $3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$ donc E(1/3 ; 1/3)

On peut donc utiliser la colinéarité :

Corrigé mini stages

$$\overrightarrow{DE}\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)\ et\ \overrightarrow{DF}\left(\frac{1}{2};-1\right)\ donc\ \overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$$

Pour tracer E , il suffit donc de tracer l'intersection de (DF) et (AC)

2) On détermine les coordonnées de K , L et G .

$$B(1;0):\ \overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\ donc\ G\left(1;\frac{2}{3}\right)$$

La parallèle à (DC) passant par G a pour équation : y = 2/3
La droite (AC) a pour équation : y = x
La droite (DF) a pour équation : y = -2x + 1

$$donc\ J\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)\ et\ K\left(\frac{1}{6};\frac{2}{3}\right)\ et\ donc\ L\left(\frac{1}{2}\ ;1\right)$$

$$\overrightarrow{KB}\left(\frac{5}{6};-\frac{2}{3}\right),\overrightarrow{LG}\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)\ donc\ non\ colinéaires$$

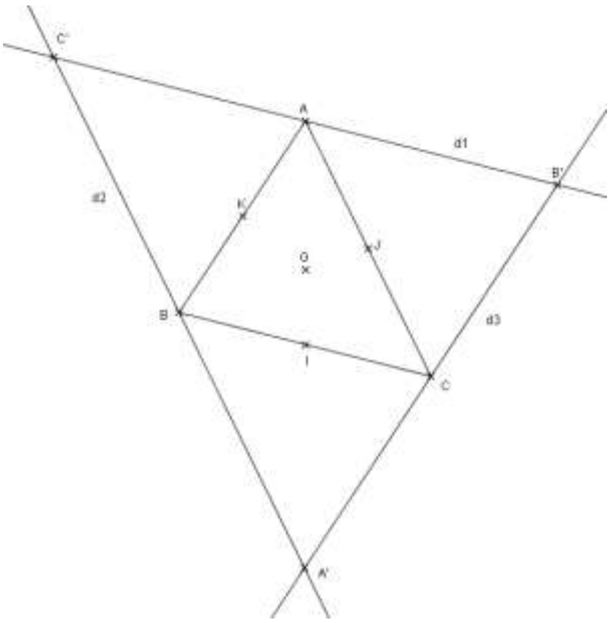
3) (DE)

$$m=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=-2\ donc\ (DE):\ y=-2x+1$$

$$(KG):y=\frac{2}{3};(LF):\ x=\frac{1}{2}$$

$$(EL):m=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=4\ donc\ (EL):\ y=4x-1$$

Exercice 15



1) A(0 ;0) ; B(1 ;0) et C(0,1)

$$I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\ et\ J\left(0;\frac{1}{2}\right)$$

$$(AI):\ y=x\ ;\ (BJ):\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y=x \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=x \\ x=\frac{1}{3}\end{cases} donc\ G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$$

G est le point d'intersection de deux médianes ; c'est donc le centre de gravité de ABC

2) Commençons pat déterminer les équations de d1 , d2 et d3

La droite d1 est parallèle à (BC) et passe par A : y = - x
La droite d2 est parallèle à (AC) et passe par B : x = 1
La droite d3 est parallèle à (AB) et passe par C : y = 1
On peut donc déterminer facilement les coordonnées de A'(1,1), B'(-1 ;1) et C'(1,-1)
(AA') : y = x c'est-à-dire que (AA') et (AI) sont confondues .

$$(BB'):\ y\ =\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ donc\ B\ ,B'\ et\ J\ alignés$$

$$(CC'):y=-2x+1$$

Par la question 1) , on sait que G appartient à (AA') et à (BB') . Or G appartient aussi à (CC') donc Ces trois droites sont concourantes en G .
On peut remarquer que A est le milieu de [B'C'] (en calculant les coordonnées du milieu de [B'C']) ; (AA') est donc une médiane et donc G est aussi le centre de gravité de A'B'C' .

Exercice 16

1) Si M appartient à C alors AM² = R² donc AM² = 1 : (x – 1)² + (y – 1)² = 1
2) On a AM² = (x – 1)² + (y – 1)² donc AM² = 1 donc AM = 1 ou AM = - 1 mais AM est une longueur donc AM = 1 . On a donc M sur le cercle de centre A et de rayon 1
3) On doit résoudre :

Corrigé mini stages

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=1 \end{cases} donc \begin{cases} y=2x-1 \\ (x-1)^2+(2x-1-1)^2=1 \end{cases} donc \begin{cases} y=2x-1 \\ 5x^2-10x+4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ 5(x^2-2x)+4=0 \end{cases} donc \begin{cases} y=2x-1 \\ 5(x-1)^2-1=0 \end{cases} donc \begin{cases} y=2x-1 \\ x-1=\dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} ou \begin{cases} y=2x-1 \\ x-1=-\dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Les deux points d'intersection sont donc :

$$B\left(1+\frac{\sqrt{5}}{5};1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) et\ D\left(1-\frac{\sqrt{5}}{5};1-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

Exercice 17

1) Comme dans l'exercice 15 on obtient :

$$I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) et\ J\left(0;\frac{1}{2}\right) et\ G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$$

2) On a

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\ de\ coordonnées\ \left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=(0{,}0)$$

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

3) On a

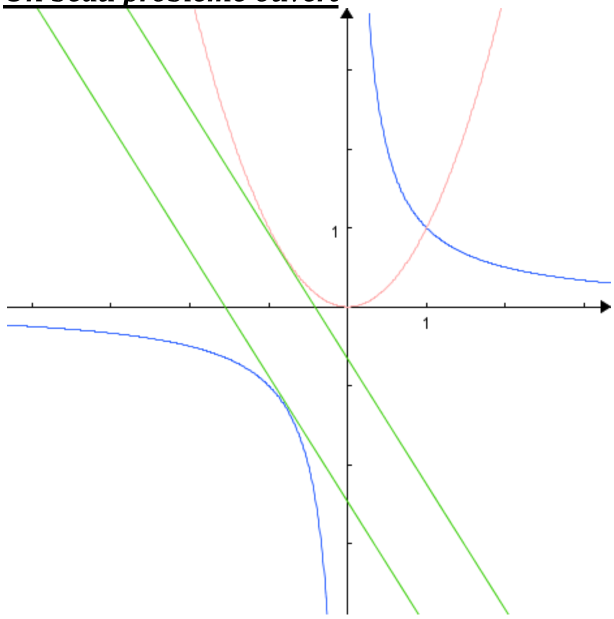
$$(x_A-x_G+x_B-x_G+x_C-x_G;y_A-y_G+y_B-y_G+y_C-y_G)=(0{,}0)$$

$$\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G \end{cases} donc \begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases}$$

4) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{MG}$

5) $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=6\ donc\ MG=2$; donc M appartient au cercle de centre G et de rayon 2

Un beau problème ouvert



On sait que deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur .
On doit donc déterminer l'équation des deux tangentes
On ne sait pas trouver l'équation d'une droite quand on a un seul point , mais on sait le faire avec deux points .
On va donc prendre deux points de H et déterminer l'équation de la droite passant par ces deux points puis on va considérer que ces deux points sont confondus .

$$A\left(a;\frac{1}{a}\right) et\ B\left(b;\frac{1}{b}\right) alors\ m=\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}=\frac{a-b}{ab(b-a)}$$

$$=-\frac{1}{ab}$$

$$Si\ A=B\ alors\ a=b\ et\ m=-\frac{1}{a^2}$$

Procédons de même avec P :

$$A(a,a^2)\ et\ B(b,b^2)\ alors\ m=\frac{b^2-a^2}{b-a}=b+a\ et\ si\ a=b\ alors\ m=2a$$

On cherche donc le point A d'abscisse a tel que

$$2a=-\frac{1}{a^2}\ soit\ a^3=-\frac{1}{2}\ donc\ a=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}\cong -0{,}79$$