LES EQUATIONS

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 27}{x^2 + 9}$$

1) a) Montrer que :

$$f(x) = 4 + \frac{3x - 63}{x^2 + 9}$$

b) Montrer que :

$$f(x) = \frac{(4x - 9)(x + 3)}{x^2 + 9}$$

2) Choisir une des expressions précédentes pour répondre à chacune des questions suivantes :
a) Calculer f(0)
b) Résoudre l'équation f(x) = 0
c) Résoudre l'équation f(x) = 4
d) Résoudre l'inéquation f(x) < 0
e) Résoudre l'inéquation f(x) $\geq$ 4

Exercice 2

1) On veut résoudre dans $[-5; +\infty[$, l'équation : $\sqrt{x+5} = x - 1$ (E1)
a) Justifier le choix de l'ensemble sur lequel on veut résoudre l'équation
b) Afficher sur l'écran de votre calculatrice les représentations graphiques des fonctions f(x) = $\sqrt{x+5}$ et g(x) = x – 1
c) Que peut-on conjecturer comme solutions pour l'équation (E1) ?
2) a) A quel ensemble appartient le nombre $\sqrt{x+5}$?
b) Sur $[1; +\infty[$, montrer que l'équation (E1) est équivalente à l'équation (E2) :(x – 4) (x + 1) = 0 .
c) Que peut-on en conclure quant aux solutions de (E1) ?
d) Cette conclusion est-elle en accord avec votre conjecture ?

Exercice 3

Montrer que pour tout réel x de $]-3; +\infty[$, on a :

$$\frac{x-1}{x+3} = 1 - \frac{4}{x+3}$$

En déduire que pour tout réel x de $]-3; +\infty[$, on a :

$$\frac{x-1}{x+3} < 1$$

Exercice 4

Montrer que $(x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^6 - 1$

En déduire le calcul de la somme :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

Eclairage

En première S , vous allez étudier les suites . On appelle suite géométrique une liste de nombres tels que pour passer de l'un d'entre eux au suivant , on multiplie toujours par le même nombre . Exemple : la suite : 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 … est une suite géométrique de raison 2 .

L'exercice précédent se généralise et nous donne la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison x :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Exercice 5

1) A partir de l'identité remarquable suivante : $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$ et en donnant à a toutes les valeurs de 1 à n , écrire n égalités , les additionner toutes puis après simplification et factorisation , montrer que :
$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
2) A partir de la formule du binôme : $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ et en donnant à a toutes les valeurs de 1 à n , écrire n égalités , les additionner toutes puis après simplification et factorisation , en utilisant 1) montrer que :
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
3) Montrer de même :
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Eclairage

Les identités remarquables se généralisent avec la formule du binôme :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1

Exercice 6

Montrer que pour tout entier naturel n , le nombre $n^2 + (n+1)^2 + n^2(n+1)^2$ est le carré d'un nombre entier .

Exercice 7

Résoudre : $4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 3x = 0$ *puis* $4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 3x \leq 0$

Exercice 8

Résoudre : $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 < 0$

Exercice 9

La fonction numérique f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus , on sait que $f(x+1) = 3x^2 + 4x + 1$

1) Quelle est l'expression algébrique de f(x) ?
2) Quelles sont les valeurs de x qui vérifient $f(x+1) = f(x-1)$?

Exercice 10

1) Soit f(x) = $^2 - 4x - 12$. Mettre f(x) sous la forme : f(x) = $(x - a)^2 - b$.
   Factoriser alors f et résoudre f(x) = 0
2) Soit f(x) = $3x^2 - 30x + 45$. Mettre f(x) sous la forme f(x) = $[(x - b)^2 - c]$.
   Résoudre alors f(x) = 0
3) Soit f(x) = $ax^2 + bx + c$. Résoudre f(x) = 0 .

Eclairage

En première S , vous verrez que si f(x) = $ax^2 + bx + c$. Alors on appelle discriminant le nombre :
$\Delta = b^2 - 4ac$ et si $\Delta > 0$ les solutions de f(x) = 0 sont :
$$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
La forme canonique de f est alors :
$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$
De plus , f est du signe de a à l'extérieur des racines , c'est-à-dire , par exemple si a > 0 :

x		X'		X''	
f(x)	+	0	-	0	+

LES FONCTIONS

Exercice 11

Soit un rectangle dont le périmètre est égal à 24 cm . Soit L une dimension du rectangle .

1) Exprimer l'autre dimension en fonction de L
2) Quelles valeurs peut-on donner à L pour que le rectangle existe ?
3) Soit A la fonction qui à chaque valeur de L associe l'aire du rectangle . Exprimer A en fonction de L .
4) A l'aide de la calculatrice , émettre une conjecture sur la valeur de L pour laquelle l'aire du rectangle est maximale .
5) Mettre A sous forme canonique et en déduire la preuve de votre conjecture .

Exercice 12

Soit [AB] un segment de longueur 6 cm . On considère un point M quelconque de [AB] tel que : AM = x cm . On construit deux triangles équilatéraux ACM , indirect , et MDB direct .
Le but de ce problème est de déterminer les valeurs de x pour lesquelles la somme des aires des triangles ACM et MDB soit égale à $\frac{13\sqrt{3}}{2}$

1) Montrer que le problème est équivalent à résoudre : $x^2 - 6x + 5 = 0$
2) En affichant à la calculatrice les courbes des fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = 6x - 5$, émettre une conjecture sur la solution du problème
3) Valider votre conjecture en résolvant par le calcul $x^2 - 6x + 5 = 0$

Exercice 13

Soit un carré ABCD de côté égal à 1 cm et soit le quart de cercle de centre A et de rayon 1 cm . Soit T un point de l'arc $\overset{\frown}{DB}$. Une tangente au cercle en T coupe [DC] en M et [BC] en N . On pose DM = x .
Déterminer une valeur approchée à 0,1 cm près de la distance MN minimale quand x prend toutes les valeurs dans [0,1] .

GEOMETRIE ANALYTIQUE

Exercice 14

ABCD est un parallélogramme . Le point G est sur [BC] au tiers de [BC] à partir de C . Le point F est le milieu de [AB] . La parallèle à (DC) passant par G coupe (AC) en J et coupe (DF) en K . On appelle E le point tel que : $3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$ et L le point tel que : $\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EL}$
On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$

1) Prouver que les points D , E et F sont alignés et en déduire une autre construction de E
2) Etudier le parallélisme de (KB) et (LG)
3) Ecrire une équation de (DE) , (KG) , (LF) et (EL)

Exercice 15

Soit ABC un triangle et soient I , J , K les milieux respectifs de [BC] , [AC] et [AB] . On considère le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

1) Déterminer une équation de chacune des droites (AI) et (BJ) . Déterminer les coordonnées du point d'intersection G de (AI) et (BJ) . Quel rôle joue G dans ABC ?
2) On mène par A la parallèle à (BC) . On appelle cette droite d1. On mène par B la parallèle à (AC) , d2 et par C la parallèle à (AB) : d3 . Le point d'intersection de d1 et d2 est C' ; celui de d1 et d3 est B' et celui de d2 et d3 A' . Déterminer les équations de (AA') , (BB') et (CC') et montrer qu'elles sont concourantes . Conclure .

Exercice 16

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On appelle C le cercle de centre A(1 ;1) et de rayon 1 et d la droite d'équation y = 2x – 1 .

1) Montrer que si un point M(x ;y) appartient à C alors ses coordonnées vérifient $(x-1)^2+(y-1)^2=1$
2) Réciproquement , montrer que si les coordonnées d'un point M(x ;y) vérifient $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ alors M appartient au cercle C
3) Trouver les coordonnées des points d'intersection de C et de d .

Eclairage

Un point M(x ;y) appartient au cercle de centre A et de rayon R si et seulement si on a :
$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$.
On peut démontrer cette formule générale en s'inspirant de l'exercice précédent .

Exercice 17

Soit ABC un triangle . On appelle K , I et J les milieux respectifs de [AB] , [BC] et [AC] . On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

1) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G de ABC
2) Déterminer $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$
3) En déduire une formule générale donnant les coordonnées du centre de gravité d'un triangle ABC en fonction des coordonnées de A , B et C
4) Déduire de la 2) une écriture plus simple de $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ où M est un point quelconque .
5) En déduire l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6$

Eclairage

Le centre de gravité d'un triangle est un cas particulier d'une grande famille mathématique : les barycentres .
Si G est barycentre des points (A,a) , (B,b) et (C,c) alors on a les formules suivantes :

$$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$
$$a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$$
$$G\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$$

Un beau problème ouvert

On appelle tangente à une courbe une droite qui « frôle » une courbe en un seul point .
Soit H l'hyperbole d'équation y = $\frac{1}{x}$ et soit P la parabole d'équation y = x² . Existe-t-il un point de H et un point de P de même abscisse ayant des tangentes parallèles ?

Pour travailler cet été

Les fiches de mon site dans la partie , « seconde » , « travaux d'été » :
http://lycmassenamathsde.olympe.in/
Les interros du lycée , éditions Nathan
Exos résolus seconde maths Hachette