★★ *Chapitre 6 : Vecteurs* ★★

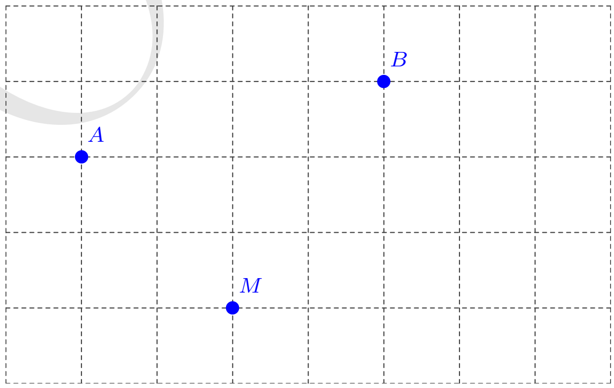
1 Notion de vecteurs

1.1 Premières définitions

Définition.

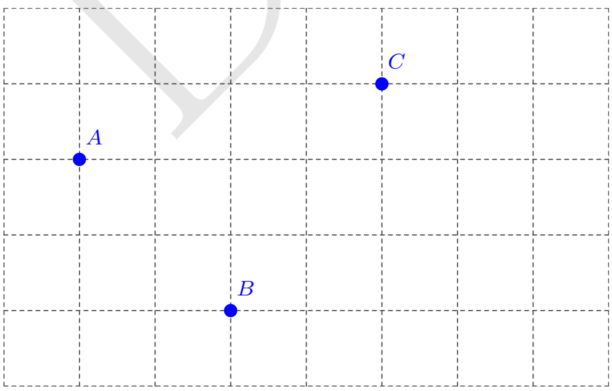
- On dit que la translation qui transforme A en B est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
- Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par sa direction , la droite (AB) , son sens , de A vers B et sa norme , notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ qui correspond à la longueur AB .
- On appelle origine de $\overrightarrow{AB}$ le point A et extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le point B .
- Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont même direction , même sens et même norme .

Dans le graphique ci-contre , tracer M' image de M par la translation qui transforme A en B



Exemple.

Tracer le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

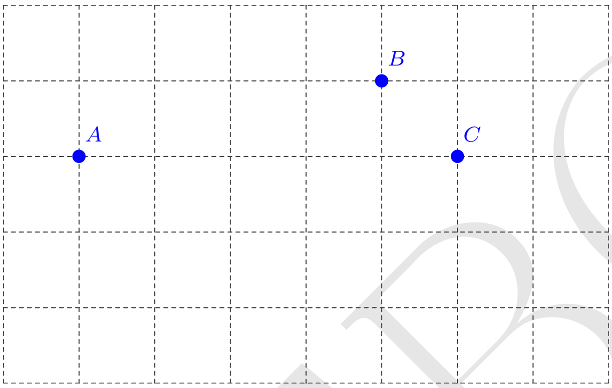


Propriété.

- ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- I est milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul et se note $\overrightarrow{0}$
- Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de même direction , de même norme mais de sens opposé . On le note $\overrightarrow{BA}$ ou $-\overrightarrow{AB}$

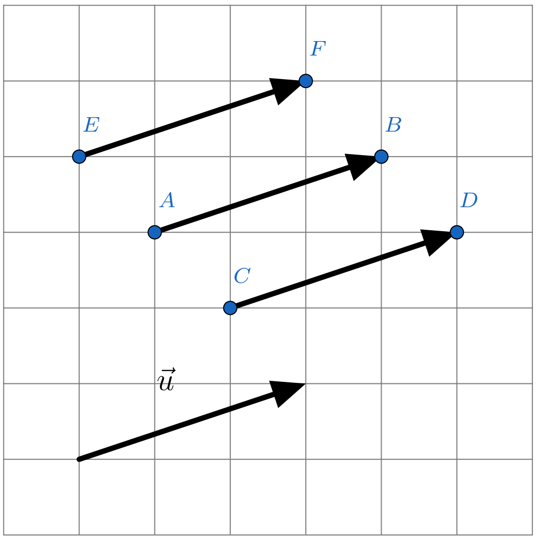
Exemple.

Tracer le point D tel que $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$



Propriété.

Des vecteurs égaux sont les représentants d'un même vecteur . On peut convenir de l'appeler $\overrightarrow{u}$.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{u}$

1.2 Coordonnées

Définition.

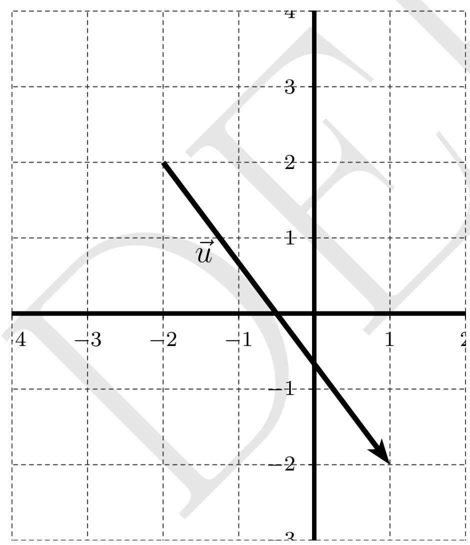
- On appelle base $(\vec{i}\,;\vec{j}\,)$, deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ qui n'ont pas la même direction . .
- $(\vec{i}\,;\vec{j}\,)$est une base orthonormée si les directions des vecteurs sont perpendiculaires et si la norme des vecteurs est égale à 1 .
- On appelle repère orthonormé tout triplet $(O;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$ avec $(\vec{i}\,;\vec{j}\,)$ une base orthonormée . L'axe des abscisses est la droite direction de $\vec{i}$ et l'axe des ordonnées est la droite direction de $\vec{j}$. O est l'origine du repère .

Propriété.

Soit $\vec{u}$ un vecteur et $(\vec{i}\,;\vec{j}\,)$ une base . Alors il existe un unique couple (x ;y) de réels tels que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. On dit que (x ;y) sont les coordonnées de $\vec{u}$. L'abscisse est x et l'ordonnée est y .

Exemple.

Donner les coordonnées de $\vec{u}$ et tracer un représentant $\vec{v}$ de coordonnées (2 ;3)



Définition.

Soit un point A tel que $\overrightarrow{OA} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. On dit que les coordonnées de A sont (x ;y) .

Propriété.

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$

Si $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ alors : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff x = x'$ et $y = y'$

Exemple.

On donne A(5 ;7) et B(3 ;4) . Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

Propriété.

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$. Alors la distance $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exemple.

On donne $A(2;8)$ et $B(6;4)$. Calculer la distance AB .

Propriété.

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

Alors le milieu du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2};\frac{y_A + y_B}{2}\right)$

Exemple.

On donne $A(2;8)$ et $B(6;4)$. Déterminer les coordonnées de I milieu de [AB] .

Exemple.

On donne $A(1;7)$, $B(3;5)$, $C(2;4)$ et $D(0;6)$. Montrer que ABCD est un parallélogramme par deux méthodes différentes

1.3 Somme

Définition.

La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, notée $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, est le vecteur correspondant à la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ composée avec la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.

Propriété.

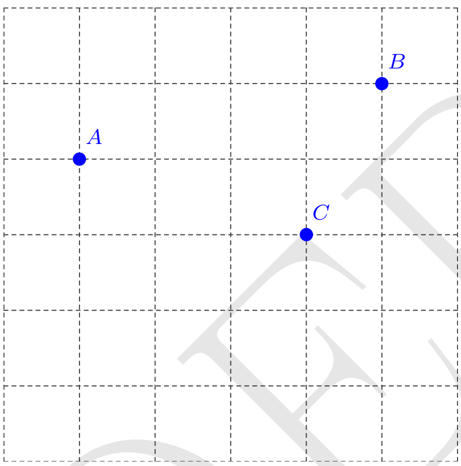
- Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Exemple.

Simplifier l'expression suivante : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$

Exemple.

Tracer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$



Propriété.

- Si $\overrightarrow{u}(x; y)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y')$ alors : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}(x + x'; y + y')$
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{(-u)} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{(-v)}$

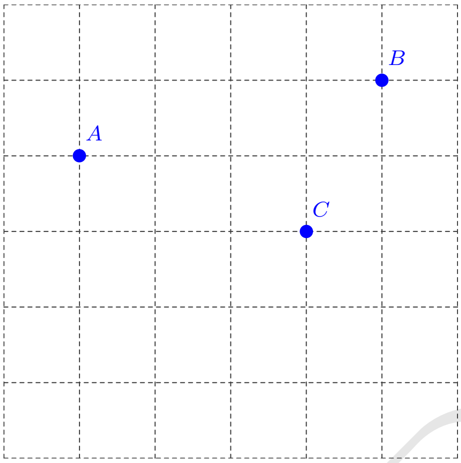
1.4 Produit par un réel

Définition.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et soit k un réel . Le vecteur obtenu $k\overrightarrow{u}$ a même direction que $\overrightarrow{u}$, même sens si $k > 0$, sens contraire si $k < 0$ et pour norme $|k| \times ||\overrightarrow{u}||$

Exemple.

Tracer le point D tel que $\overrightarrow{CD} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



Propriété.

- Si $\overrightarrow{u}(x; y)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y')$ alors : $k\overrightarrow{u}(kx; ky)$
- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
- $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$
- $k(k'\overrightarrow{u}) = kk'\overrightarrow{u}$

Exemple.

Simplifier : $5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AB} =$

2 Colinéarité

2.1 Principe

Définition. On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe k réel tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$

Propriété.

- (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
- Les points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires .

Exemple.
$\overrightarrow{u}(2;7)$ et $\overrightarrow{v}(4;14)$ sont colinéaires car $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{u}$

2.2 Déterminant

Définition.
Soient $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$.

On appelle déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et on note $det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ le nombre $xy' - x'y$

Propriété.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0$

Exemple.
Soit $\overrightarrow{u}(1;a)$ et $\overrightarrow{v}(t,a+5)$. Déterminer t en fonction de a pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires .