A retenir

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=0$

Le principe

Logique

Pour démontrer une équivalence $A \iff B$, on procède en deux étapes . On montre d'abord que si A est vraie alors on retrouve B . Puis on suppose que B est vraie et on démontre que A l'est également .

On utilise la définition de vecteurs colinéaires et la formule du déterminant .

La démonstration

Première étape

Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires .
Alors , il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$.
Supposons que $\overrightarrow{v}(x;y)$ alors $\overrightarrow{u}(kx;ky)$ et donc :
$det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=\begin{vmatrix} kx & x \\ ky & y \end{vmatrix}=kxy-kyx=0$

Deuxième étape

Supposons que $det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=0$ avec $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$.
On a alors : $xy'-x'y=0$. Egalité (E)

- Premier cas : $x'\neq 0$ et $y'\neq 0$

  De l'égalité (E) , nous allons tirer trois autres égalités en manipulant cette expression .

  La première : $xy'=x'y \iff \dfrac{x}{x'}=\dfrac{y}{y'}=k$

  La deuxième : $xy'=x'y \iff x=x'\times\dfrac{y}{y'}=kx'$

  La troisième : $xy'=x'y \iff y=y'\times\dfrac{x}{x'}=ky'$

  On a donc bien : $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires .

- Deuxième cas : $x'\neq 0$ et $y'=0$

  $xy'-x'y=0$ devient $x'y=0$ et donc $y=0$ donc $\overrightarrow{u}(x;0)$ et $\overrightarrow{v}(x';0)$ ce qui donne $\overrightarrow{u}=\dfrac{x}{x'}\overrightarrow{v}$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires .

- Troisième cas : $x'=0$ et $y'=0$

  Tout vecteur est colinéaire au vecteur nul donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires .