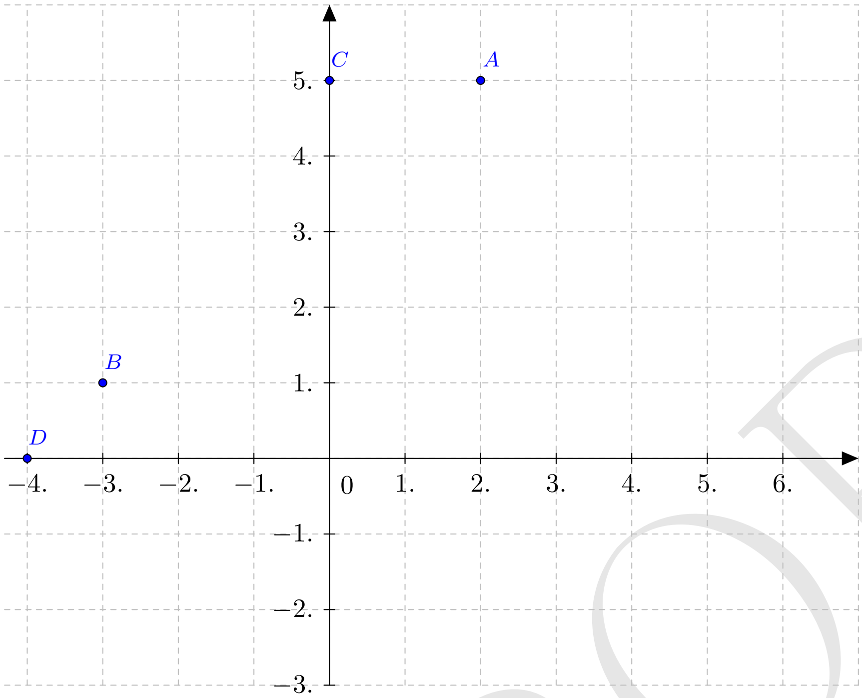
1 Coordonnées

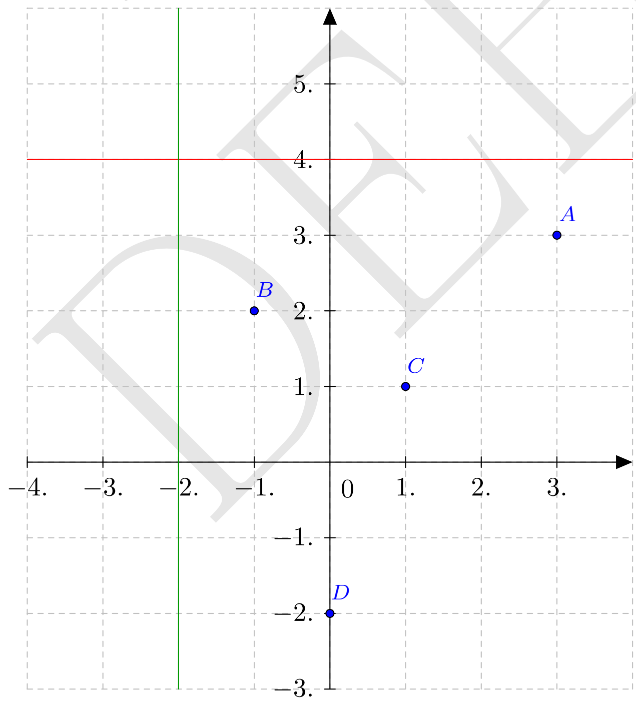
Exercice 1

Placer dans un repère les points suivants : A(2 ;5) , B(-3 ;1) , C(0 ;5) et D(-4 ;0).



Exercice 2

Voici un graphique



Lire les coordonnées des points du graphique A(3 ;3) , B(-1 ;2) , C(1,1) et D(0 ;-2)

Quelle est la caractéristique commune des points situés sur la droite rouge ? Tous les points ont la même ordonnée égale à 4

Quelle est la caractéristique commune des points situés sur la droite verte ? Tous les points ont la même abscisse égale à -2

2 Milieu , distance

A retenir

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors le milieu de [AB] a pour coordonnées $(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2})$ et la distance AB est égale à $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exercice 3

Soient les points A(1 ;5) , B(3 ;7) , C(-4 ;5) et D(2 ;8)

Calculer AB $= \sqrt{(3-1)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Calculer AC $= \sqrt{(-4-1)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

Calculer CD $= \sqrt{(2+4)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Calculer BD BD $= \sqrt{(2-3)^2 + (8-7)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} =$

Calculer les coordonnées du milieu de [AB] $(\dfrac{1+3}{2}; \dfrac{5+7}{2})$ *donc (2 ;6)*

Calculer les coordonnées du milieu de [BC] $(\dfrac{3-4}{2}; \dfrac{7+5}{2})$ *donc* $(-\dfrac{1}{2}; 6)$

Calculer les coordonnées du milieu de [BD] $(\dfrac{3+2}{2}; \dfrac{7+8}{2})$ *donc* $(\dfrac{5}{2}; \dfrac{15}{2})$

Exercice 4

On donne dans un repère orthonormé (O, I , J) les points A(5 ;7) , B(1 ;9) et C(9 ;5) .

Calculer les coordonnées de I milieu de [AB] $I(\dfrac{5+1}{2}; \dfrac{7+9}{2})$ *donc I(3 ;8)*

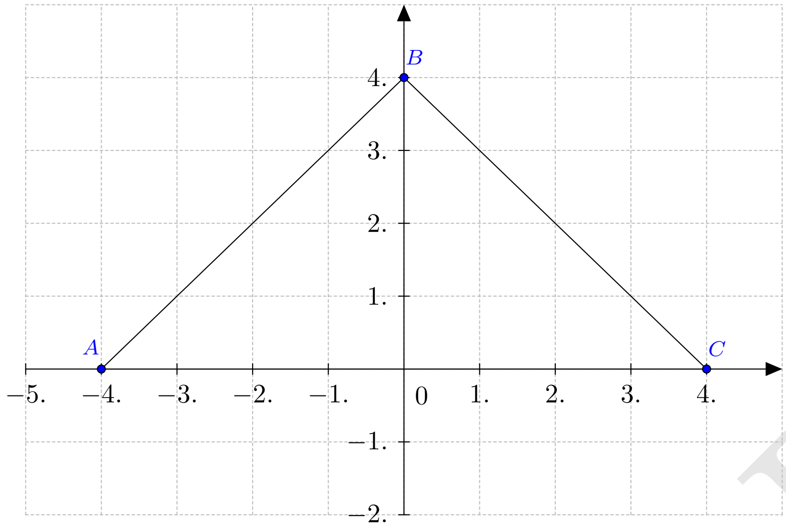
Calculer les coordonnées de J milieu de [BC] $J(\dfrac{1+9}{2}; \dfrac{9+5}{2})$ *donc J(5 ;7)*

Calculer AB , AC et BC AB $= \sqrt{(1-5)^2 + (9-7)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ *;*
$AC = \sqrt{(9-5)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ *;*
$BC = \sqrt{(9-1)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

Que peut-on conclure pour le triangle ABC ? ABC est isocèle en A car AB = AC

Exercice 5

Dans un repère orthonormé (O , I , J) , on donne A(-4 ;0) , B(0,4) et C(4 ;0) .



Placer les points dans le repère

Quelle conjecture peut-on faire sur la nature du triangle ABC ? Le triangle ABC semble isocèle rectangle en B

Démontrer la conjecture (on pourra calculer AB , AC et BC) . $AB = \sqrt{(0+4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ *;*
$AC = \sqrt{(4+4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{64} = 8$ *;*
$BC = \sqrt{(4-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
On a donc $AB = BC$ *et de plus* $AB^2 + BC^2 = AC^2$ *donc par la réciproque de Pythagore , le triangle ABC est rectangle en B .*

Exercice 6

Dans un repère orthonormé (O ,I , J) on donne les points A(1 ;0) et $B(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ *Montrer que le triangle OAB est équilatéral .*
On va calculer OA , OB et AB : $OA = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{1} = 1$

$$OB = \sqrt{(\frac{1}{2} - 0)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} - 0)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$AB = \sqrt{(\frac{1}{2} - 1)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

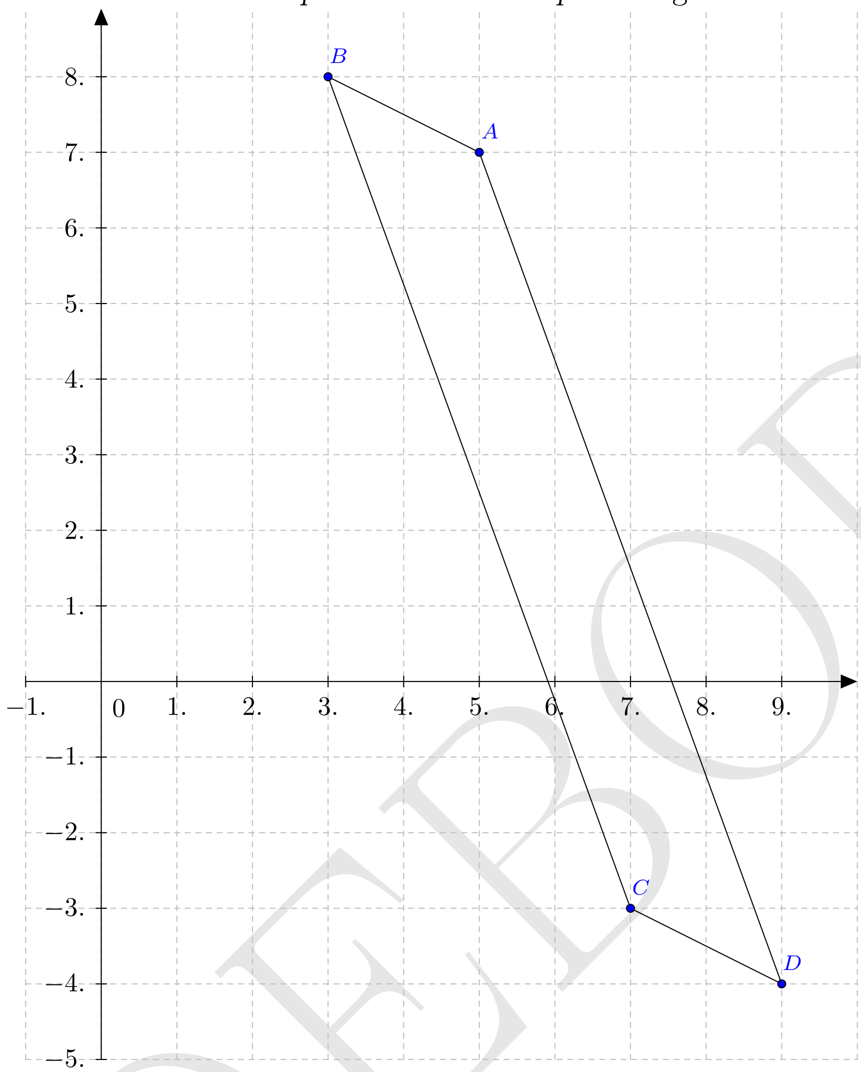
$OA = OB = AB$ *donc OAB est bien équilatéral .*

3 Parallélogrammes

> *A retenir*
>
> Quand on cherche les coordonnées du quatrième sommet d'un parallélogramme , on utilise le milieu commun des deux diagonales .

Exercice 7

On donne les points A(5 ;7) , B(3 ;8) et C(7 ;-3) . Le but de l'exercice est de trouver les coordonnées de D tel que ABCD soit un parallélogramme .



Placer les points A , B et C et tracer le parallélogramme ABCD .

Citer les diagonales . Les diagonales sont [AC] et [BD]

Calculer les coordonnées du milieu I de la diagonale connue . La diagonale connue est [AC] donc $I(\dfrac{5+7}{2};\dfrac{7-3}{2})$ *donc* $I(6;2)$

Ecrire la formule donnant les coordonnées du milieu de l'autre diagonale L'autre diagonale est [BD] donc les coordonnées de son milieu sont $(\dfrac{3+x_D}{2};\dfrac{8+y_D}{2}$

I est donc le milieu de [AC] et [BD] . Déterminer les coordonnées de D . En utilisant les coordonnées de I et la formule du milieu de [BD] , on a : $6=\dfrac{3+x_D}{2}$ *et* $2=\dfrac{8+y_D}{2}$ *. Ce qui donne* $12=3+x_D$*d'où* $x_D=12-3=9$ *et* $4=8+y_D$ *d'où* $y_D=4-8=-4$
On a donc D(9 ;-4)

Astuce

Faire le schéma même à main levée au brouillon pour voir l'ordre des lettres du parallélogramme et savoir qui sont les diagonales .

Exercice 8

Déterminer les coordonnées de G tel que EFGH soit un parallélogramme sachant que E(-3 ;4) , F(5 ;3) et H(-1 ;1) .

Les diagonales de EFGH sont [EG] et [FH] .

Calculons les coordonnées de I milieu de [FH] : $I(\dfrac{5-1}{2};\dfrac{3+1}{2}$ *donc* $I(2;2)$

I est aussi milieu de [EG] donc $2=\dfrac{-3+x_G}{2}$ *et* $2=\dfrac{4+y_G}{2}$ *. On a :* $x_G=7$ *et* $y_G=0$ *donc* $G(7;0)$

Exercice 9

On donne les points E(5 ;9) , F(-4 ;3) , G(-9 ;4) et H(0 ;10) . Montrer que EFGH est un parallélogramme .

Calculons les coordonnées du milieu de [EG] : $(\dfrac{5-9}{2};\dfrac{9+4}{2}$ *. Donc* $(-2;\dfrac{13}{2})$ *.*

Calculons maintenant les coordonnées du milieu de [FH] : $(\dfrac{-4+0}{2};\dfrac{3+10}{2})$ *. Donc* $(-2;\dfrac{13}{2})$ *.*

Les diagonales de EFGH ont le même milieu donc EFGH est un parallélogramme .

Exercice 10

On donne les points R(1 ;5) , S(-1 ;7) , T(1 ;9) .

Déterminer les coordonnées de U tel que RSTU soit un parallélogramme . Les diagonales de RSTU sont [RT] et [SU] . Le milieu de [RT] a pour coordonnées : $(\dfrac{1+1}{2};\dfrac{5+9}{2})$ *donc* $(1;7)$ *. Le milieu de [SU] a pour coordonnées* $(\dfrac{-1+x_U}{2};\dfrac{7+y_U}{2})$ *donc on doit résoudre :*

$1=\dfrac{-1+x_U}{2} \iff 2=-1+x_U \iff x_U=3$ *et*

$7=\dfrac{7+y_U}{2} \iff 14=7+y_U \iff y_U=7$ *.*

Donc U(3 ;7)

Montrer que RSTU est un losange . On sait que RSTU est un parallélogramme donc il suffit de montrer que deux côtés consécutifs ont la même longueur . Calculons donc RS et ST :

$RS=\sqrt{(-1-1)^2+(7-5)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$ST=\sqrt{(1+1)^2+(9-7)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Donc $RS=ST$ *et RSTU est bien un losange .*

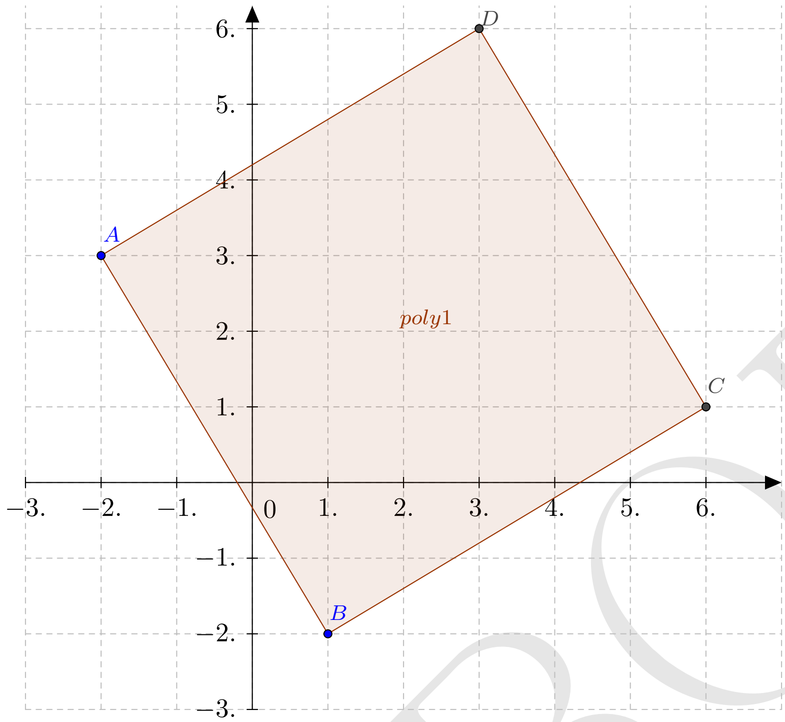
Montrer que RSTU est un carré . On vient de montrer que RSTU est un losange donc il suffit de montrer que RSTU est aussi rectangle , c'est à dire qu'il possède un angle droit . Puisqu'on a déjà calculer RS et ST , on va calculer RT et utiliser la réciproque de Pythagore :

$RT=\sqrt{(1-1)^2+(9-5)^2}=\sqrt{0+16}=4$

On remarque que $RS^2+ST^2=RT^2$ *donc par la réciproque de Pythagore , on peut dire que* *le triangle RST est rectangle en S . Donc RSTU possède bien un angle droit . Conclusion, RSTU est un carré .*

Exercice 11

On donne les points A(-2 ;3) , B(1 ;-2) et C(6 ;1) .



Placer les points dans le repère

Tracer le parallélogramme ABCD

Calculer les coordonnées de D pour que ABCD soit un parallélogramme . Les diagonales de ABCD sont [AC] et [BD] et doivent avoir le même milieu . Cherchons les coordonnées du milieu de [AC] :

$(\frac{-2+6}{2};\frac{3+1}{2})$ *donc* $(2;2)$

On doit donc avoir :$2=\frac{1+x_D}{2} \iff 4=1+x_D \iff x_D=3$ *et*

$2=\frac{-2+y_D}{2} \iff 4=-2+y_D \iff y_D=6$

Donc D(3 ;6)

Conjecturer la nature de ABCD . Il semble que ABCD soit un carré

Démontrer rigoureusement la conjecture . On sait déjà que ABCD est un parallélogramme . Montrons maintenant que c'est un losange et un rectangle , autrement dit qu'il a deux côtés consécutifs égaux et un angle droit . Pour cela , calculons AB , BC et AC .

$AB=\sqrt{(1+2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

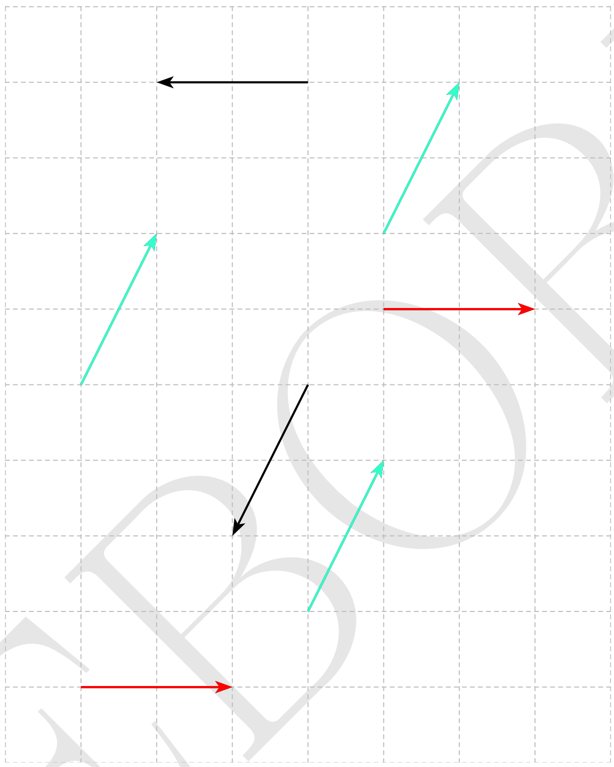
$BC=\sqrt{(6-1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$

$AC=\sqrt{(6+2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{64+4}=\sqrt{68}$

On a donc $AB=BC$ *et* $AB^2+BC^2=AC^2$ *et par la réciproque de Pythagore , on peut* *affirmer que ABC est rectangle en B . Conclusion , ABCD est un losange et un rectangle donc c'est un carré*

4 Bases

Exercice 12
Mettre dans une même couleur les vecteurs égaux :



Exercice 13
Compléter avec les bonnes notations : $\overrightarrow{AB}$, AB , $[AB]$ *ou* (AB)

Le milieu de $[AB]$ *est un point qu'on appelle* I *.*

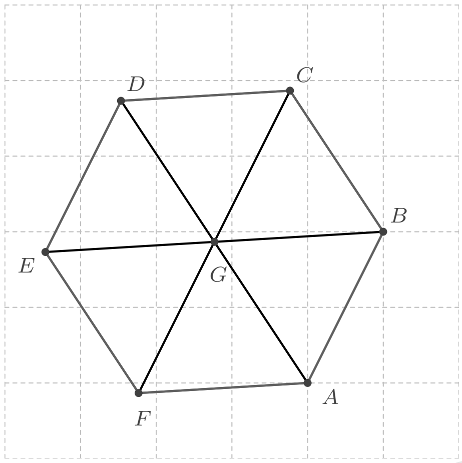
Le sens de $\overrightarrow{AB}$ *va de la gauche vers la droite .*

$AB = 4cm$

La médiatrice de $[AB]$ *est l'ensemble des points équidistants de* A *et de* B *.*

On trace (AB) *parallèle à la droite* d *passant par* C *.*

Exercice 14
Dans la figure ci-dessous , citer :



Des vecteurs égaux à $\overrightarrow{DC}$:$\overrightarrow{FA}$

Des vecteurs égaux à $\overrightarrow{DG}$: $\overrightarrow{GA}$ **,** $\overrightarrow{CB}$ **et** $\overrightarrow{EF}$

Des vecteurs opposés à $\overrightarrow{GB}$:$\overrightarrow{BG}$ **,** $\overrightarrow{GE}$ **,** $\overrightarrow{AF}$ **et** $\overrightarrow{CD}$

Des vecteurs égaux à $2\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{BE}$

Exercice 15

Compléter :

$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

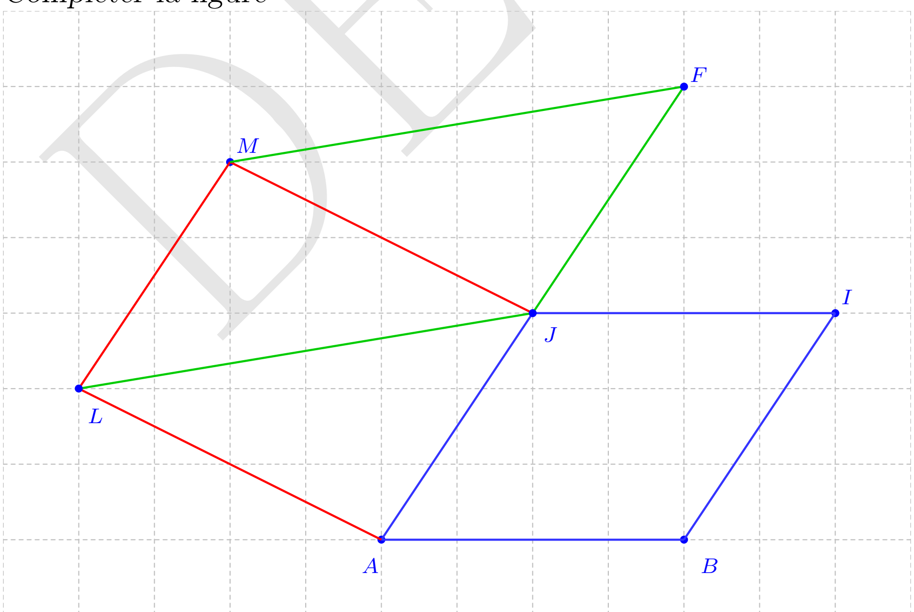
$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$

$-\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG}$

Exercice 16

ABIJ , AJML et LJFM sont des parallélogrammes .

Compléter la figure



ABIJ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AJ}$

AJML est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{LM}$

LJFM est un parallélogramme donc $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{JF}$

On peut donc en conclure que BIFJ est un **parallélogramme** *car* $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{JF}$

Exercice 17
Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes , en justifiant .

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FG} \iff$ *ABFG est un parallélogramme .* ***Faux , c'est ABGF parallélogramme***

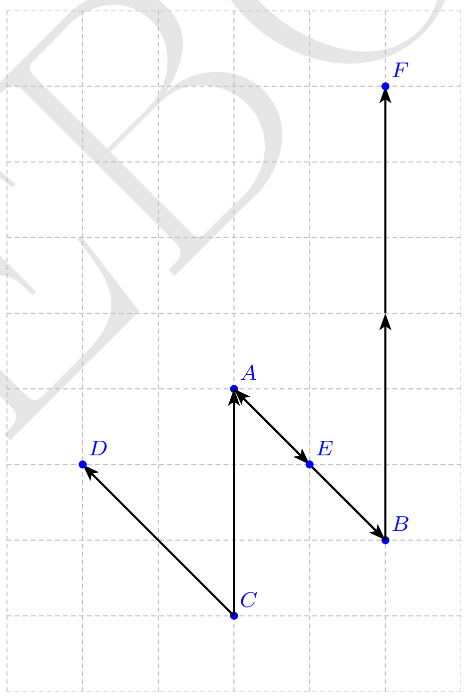
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FG} \iff$ *FGBA est un parallélogramme .* ***Vrai , par cours***

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FG} \iff AB = FG$ ***Faux ,*** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FG} \implies AB = FG$

I milieu de $[AB] \iff IA = IB$ ***Faux , on a : I milieu de*** $[AB] \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ***ou I milieu de*** $[AB] \implies IA = IB$

5 Constructions

Exercice 18
Sur la figure ci-dessous , construire :

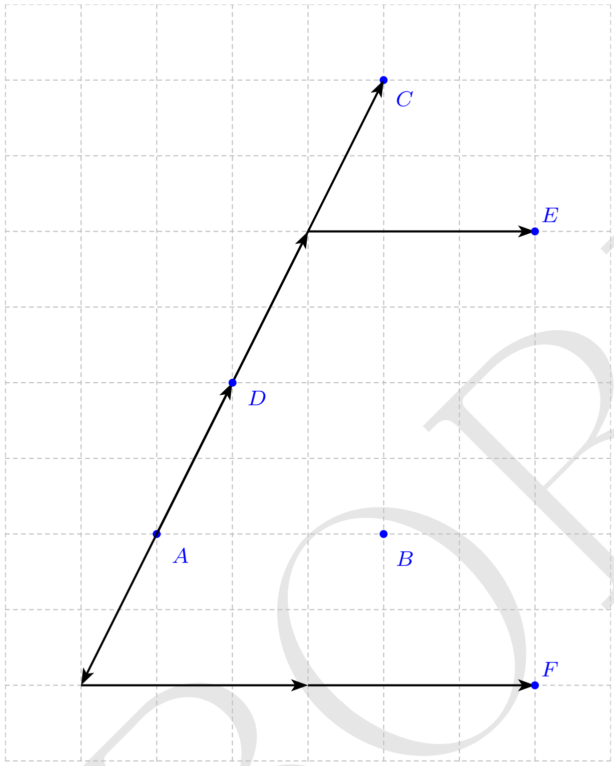


Le point D tel que $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$

Le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Le point F tel que $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{CA}$

Exercice 19
Sur la figure ci-dessous , construire :

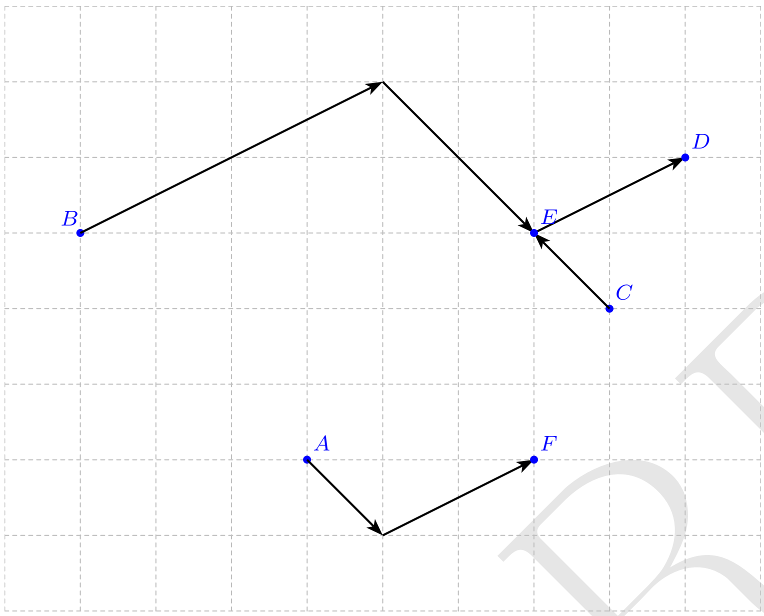


Le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

Le point F tel que $\overrightarrow{AF} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$

Exercice 20
Sur la figure ci-dessous , construire :



Le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Le point F tel que $\overrightarrow{AF} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

6 Relation de Chasles

Exercice 21
Simplifier en utilisant la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

$2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$

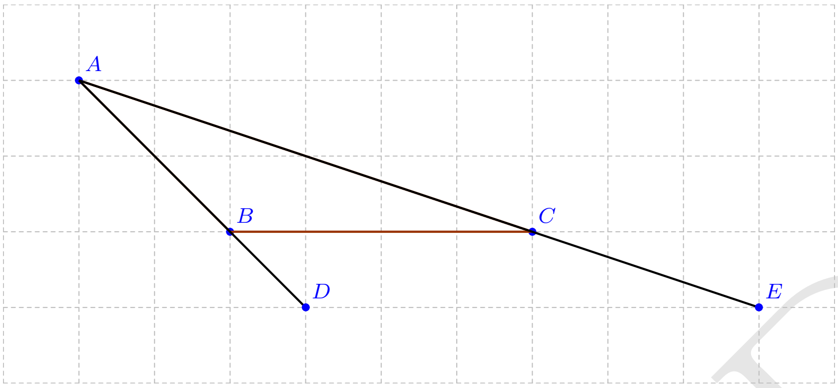
Exercice 22
Compléter

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{C\mathbf{D}} + \overrightarrow{D\mathbf{E}} = \overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\mathbf{BD}} + \overrightarrow{D\mathbf{C}} = \overrightarrow{\mathbf{A}C}$

Exercice 23
Soit ABC un triangle .

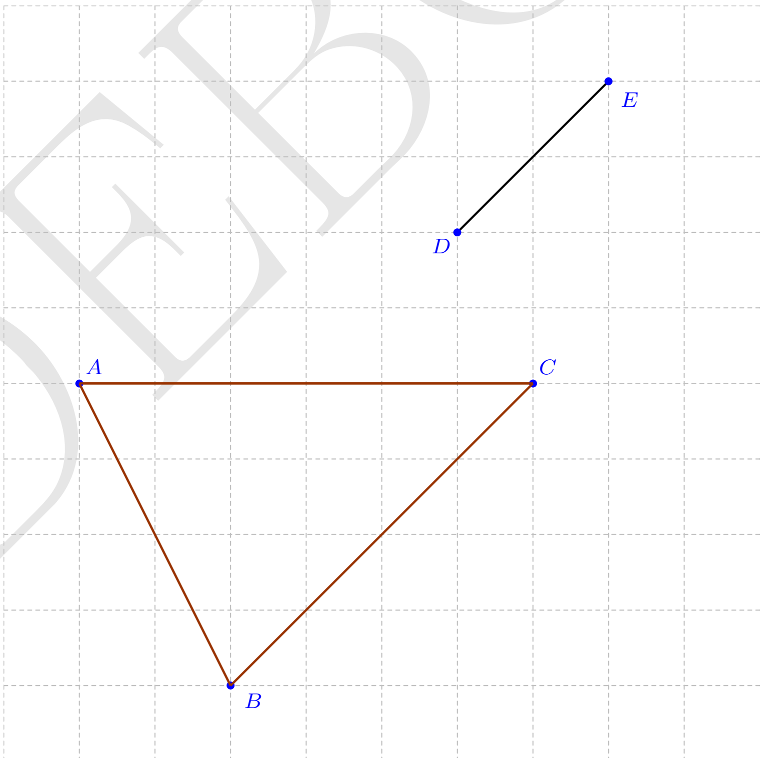


Placer D et E tels que : $\overrightarrow{AD} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

Conjecturer une expression de $\overrightarrow{AE}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AC}$ **Il semble que** $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Démontrer la conjecture en commençant par $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} =. \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \dfrac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Exercice 24
Soit ABC un triangle .

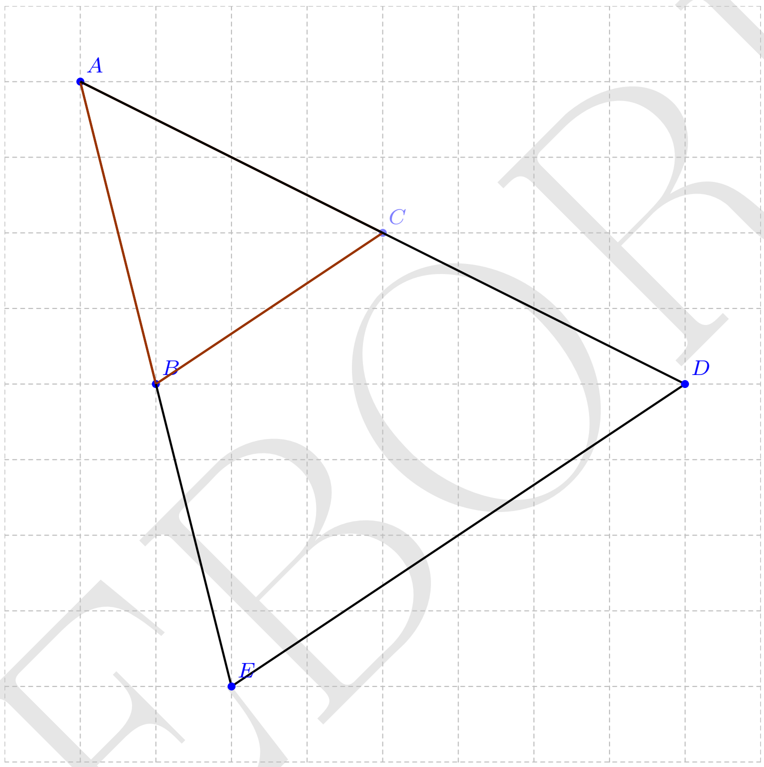


Placer D et E tels que : $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$

Conjecturer une expression de $\overrightarrow{DE}$ *en fonction de* $\overrightarrow{BC}$ ***Il semble que*** $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Démontrer la conjecture . $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Exercice 25
ABC est un triangle .



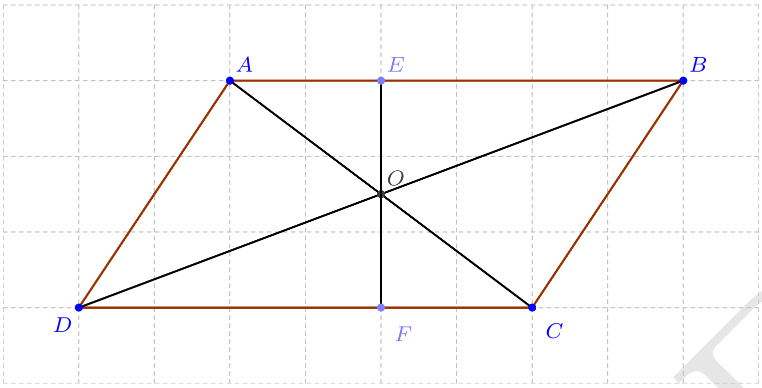
Placer D et E tels que : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$

Conjecturer la position de C , A et D ***Il semble que C soit le milieu de*** $[AD]$

Exprimer $\overrightarrow{AD}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AC}$ *. Pour cela , compléter* $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$

Démontrer la conjecture $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$ ***donc C est le milieu de*** $[AD]$

Exercice 26
ABCD est un parallélogramme de centre O



Placer E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

Conjecturer la position de E , O et F ***Il semble que O soit le milieu de*** $[EF]$

Exprimer $\overrightarrow{EF}$ *en fonction de* $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC}$ *. Pour cela , compléter :* $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

Exprimer $\overrightarrow{EO}$ *en fonction de* $\overrightarrow{CD}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *. Pour cela , compléter :* $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AO} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Démontrer la conjecture ***Par les questions précédentes , on a :*** $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EO}$ ***donc O est le milieu de*** $[EF]$

7 Colinéarité

Exercice 27
Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires .* **vrai**

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires .* ***faux , ils peuvent être colinéaires sans être égaux***

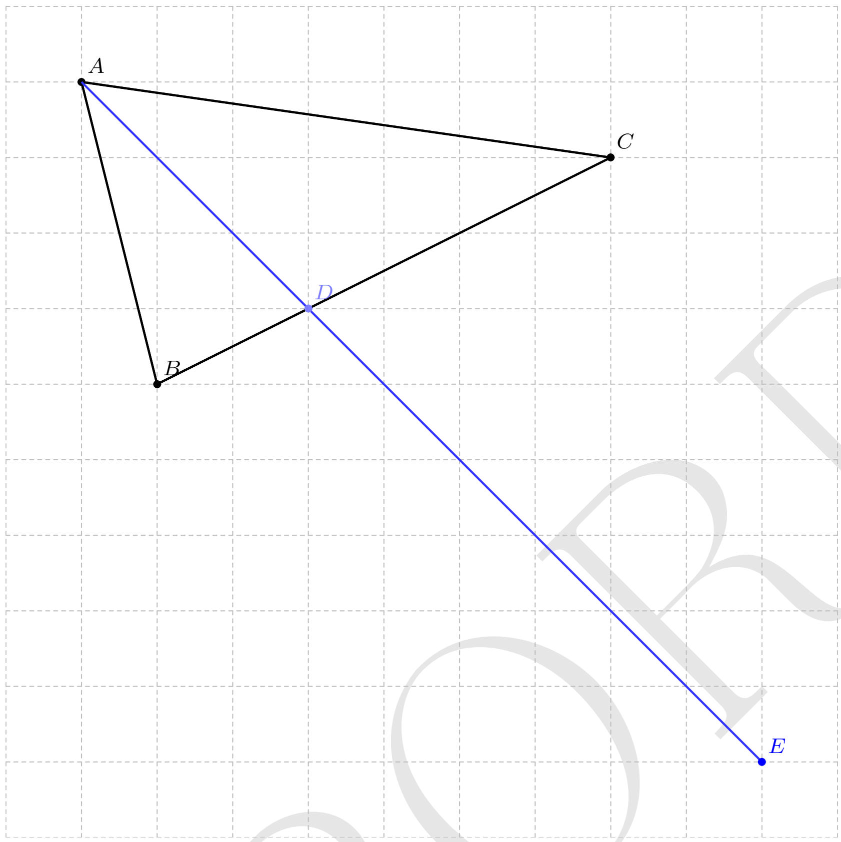
A , B et C alignés $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ *colinéaires .* ***Vrai***

A , B et C alignés $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ *.* ***Faux , les points peuvent être alignés sans que B soit le milieu de*** $[AC]$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires* $\iff$ *A , B , C et D sont alignés .* ***Faux , les droites (AB) et (CD) sont parallèles mais pas obligatoirement confondues***

> **Astuce**
> Des vecteurs sont colinéaires s'ils sont proportionnels .

Exercice 28
Soit ABC un triangle

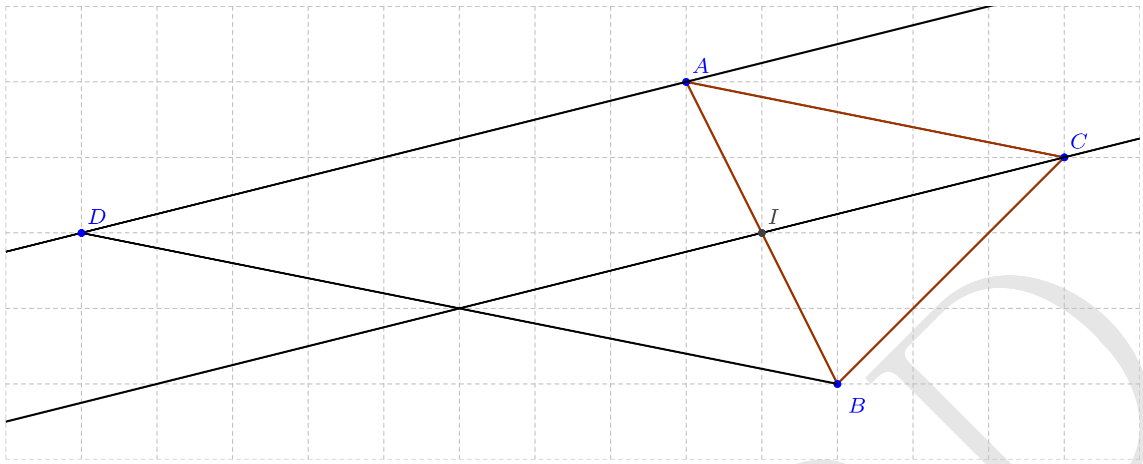


Placer les points D et E tels que $\overrightarrow{BD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$

Que peut-on conjecturer pour les points A *,* D *et* E *?* ***Les points A , D et E semblent alignés***

Démontrer la conjecture $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ ***. Les vecteurs*** $\overrightarrow{AD}$ ***et*** $\overrightarrow{AE}$ ***sont colinéaires donc les points A , D et E sont bien alignés***

Exercice 29
ABC est un triangle et I est le milieu de $[AB]$



Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

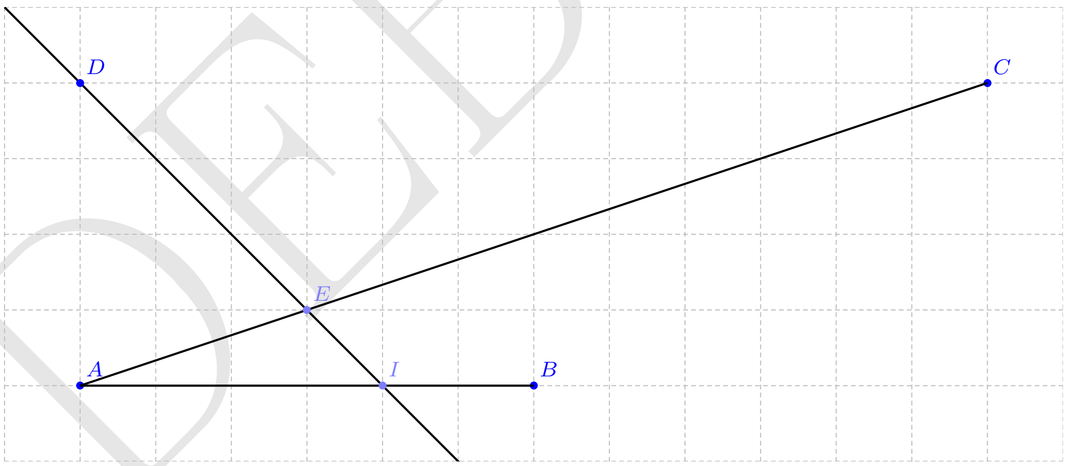
Quelle conjecture peut-on faire sur la position de (CI) et (AD) ? ***Il semble que (AD) et(CI) soient parallèles***

Exprimer $\overrightarrow{CI}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Démontrer la conjecture $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{CI}$ ***donc les vecteurs*** $\overrightarrow{AD}$ ***et*** $\overrightarrow{CI}$ ***sont colinéaires donc les droites (AD) et (CI) sont parallèles***

Exercice 30

On donne la figure ci-dessous :



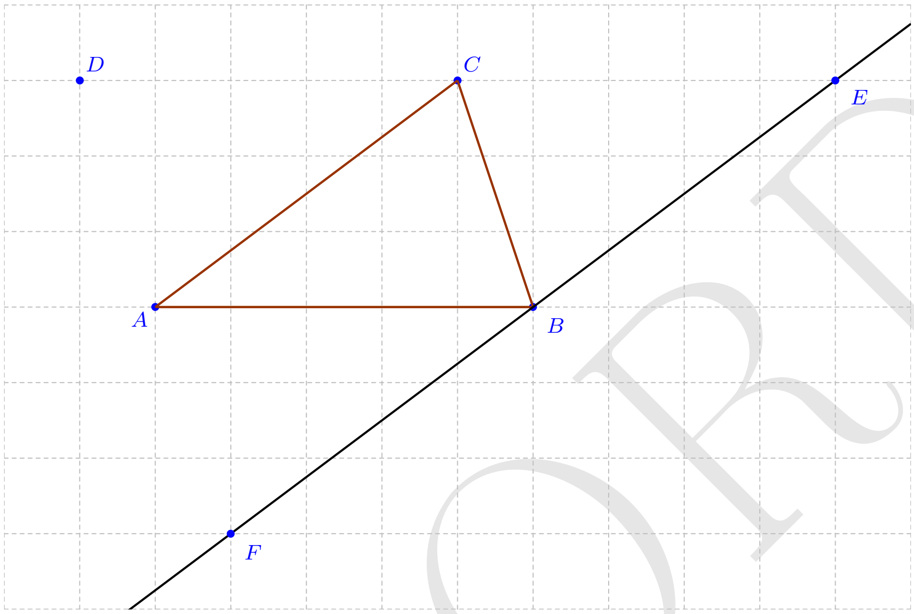
Placer les points D , E et I tels que $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Exprimer $\overrightarrow{ED}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *. Pour cela compléter :* $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$

Exprimer $\overrightarrow{EI}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Démontrer que les points E , I et D sont alignés :$\overrightarrow{ED} = -3\overrightarrow{EI}$ ***donc les vecteurs*** $\overrightarrow{ED}$ ***et*** $\overrightarrow{EI}$ ***sont colinéaires et les points E , I et D sont alignés***

Exercice 31
Dans un triangle ABC on donne les points D , E et F tels que : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DC}$ *et* $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{DA}$



Compléter la figure

Exprimer $\overrightarrow{EF}$ *en fonction de* $\overrightarrow{CA}$: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = -2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DA} = 2(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = 2\overrightarrow{CA}$

Exprimer $\overrightarrow{EB}$ *en fonction de* $\overrightarrow{CA}$: $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$

Que peut-on en déduire pour les points E , B et F ? : $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EB}$ ***donc B est le milieu de*** $[EF]$

8 Coordonnées de vecteurs

A retenir

$A(x_A; y_A) et B(x_B; y_B)$ alors $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

Exercice 32
Dans les cas suivants , calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

A(5 ;8) et B(7 ;5) : $\overrightarrow{AB}(7-5; 5-8)$ ***donc*** $\overrightarrow{AB}(2; -3)$

$A(-4; 6) et B(3; 4)$: $\overrightarrow{AB}(3+4; 4-6)$ ***donc*** $\overrightarrow{AB}(7; -2)$

$A(-4; -1) et B(-1; -8)$: $\overrightarrow{AB}(-1+4; -8+1)$ ***donc*** $\overrightarrow{AB}(3; -7)$

Exercice 33
On donne $A(-5; 4)$, $B(7; 8)$ *et* $C(4; -3)$.

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}(7+5; 8-4)$ ***donc*** $\overrightarrow{AB}(12; 4)$

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BC}(4-7;-3-8)$ ***donc*** $\overrightarrow{BC}(-3;-11)$

Calculer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$: ***Posons D(x ;y) . On a :*** $\begin{cases} x & -4 = 12 \\ & y+3 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 16 \\ & y = 1 \end{cases}$ ***donc D(16 ;1)***

Calculer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC}$: ***On pose E(x :y) . On a :*** $\begin{cases} x & +5 = -6 \\ & y-4 = -22 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = -11 \\ & y = -18 \end{cases}$ ***donc*** $E(-11;-18)$

Calculer les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$:***Posons F(x ;y) . On a :*** $\begin{cases} x & -4 = 15 \\ & y+3 = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 19 \\ & y = 12 \end{cases}$ ***donc F(19 ;12)***

Exercice 34
Soient les points $A(-2;4)$, $B(1;5)$ *et* $C(-3;-5)$

Calculer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$: ***On pose M(x ;y) . On a :*** $\begin{cases} -2-x+1-x & = & -3-x \\ 4-y+5-y & = & -5-y \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 2 \\ & y = 14 \end{cases}$ ***donc M(2 ;14)***

Exercice 35
Soient les points $A(4;-5)$, $B(-1;8)$ *et* $C(1;3)$

Calculer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AC}$: ***Posons D(x ;y) . On a :*** $\begin{cases} x-4 & = & 1+1+2\times(1-4) \\ y+5 & = & 3-8+2\times(3+5) \end{cases} \iff \begin{cases} x-4 & = & -4 \\ y+5 & = & 11 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & 6 \end{cases}$ ***Donc D(0 ;6)***

Calculer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$:***Posons E(x ;y) . On a :*** $\begin{cases} x+1 & = & -1-4-(1+1) \\ y-8 & = & 8+5-(3-8) \end{cases} \iff \begin{cases} x+1 & = & -7 \\ y-8 & = & 18 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & -8 \\ y & = & 26 \end{cases}$ ***donc*** $E(-8;26)$

9 Parallélogrammes

A retenir

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Exercice 36
On donne les points A(5 ;7) , B(8 ;9) , C(4 ;5) et D(7 ;7) .

ABCD est-il un parallélogramme ? ***Calculons les coordonnées des vecteurs*** $\overrightarrow{AB}(3;2)$ ***et*** $\overrightarrow{DC}(-3;-2)$ ***. Puisque*** $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$ ***alors ABCD n'est pas un parallélogramme .***
Remarque : $\overrightarrow{CD}(3;-2)$ ***donc*** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ***et donc ABDC est un parallélogramme !***

Attention

Bien tenir compte de l'ordre des lettres du parallélogramme pour travailler avec les bons vecteurs .

Exercice 37

Dans un repère orthonormé , on donne les points A(1 ;3) , $B(5;-1)$, *C(3 ;5) et D(7 ;1) .*

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ *et* $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AB}(4;-4)$ **,** $\overrightarrow{AC}(2;2)$**,** $\overrightarrow{AD}(6;-2)$ **,** $\overrightarrow{BC}(-2;6)$ **,** $\overrightarrow{BD}(2;2)$ **et** $\overrightarrow{CD}(4;-4)$

Lequel de ces quadrilatères et un parallélogramme ? ADCB , ABDC ou ACBD ? $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ **donc ACDB est un parallélogramme : c'est aussi le parallélogramme ABDC .**

Exercice 38

On donne les points A(4 ;3) , B(7 ;9) et C(5 ;8) .

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}(3;6)$

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Déterminer les coordonnées de D tel que ABCD soit un parallélogramme . ***Posons D(x ;y) alors par la question précédente ,***

$$\begin{cases} 3 &= 5-x \\ 6 &= 8-y \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 2 \\ y &= 2 \end{cases}$$ ***Donc D(2 ;2)***

Astuce

Faire le schéma à main levée pour visualiser l'ordre des points du parallélogramme

Exercice 39

On donne les points $T(9;-2)$, $U(-1;-3)$ *et* $Y(4;5)$

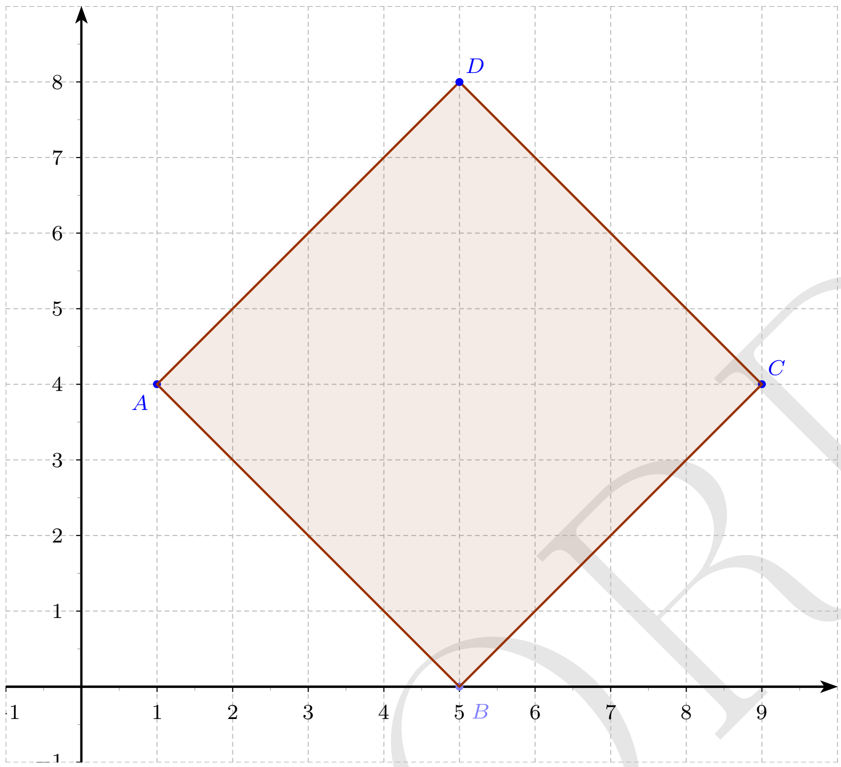
Déterminer les coordonnées de S tel que TYSU soit un parallélogramme . ***TYSU est un parallélogramme si et seulement si*** $\overrightarrow{TY}=\overrightarrow{US}$ ***. Posons S(x ;y) . On doit donc résoudre :***

$$\begin{cases} 4-9 &= x+1 \\ 5+2 &= y+3 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -6 \\ y &= 4 \end{cases}$$ ***Donc*** $S(-6;4)$

Exercice 40

Dans un repère orthonormé , on donne A(1 ;4) , B(5 ;0) et C(9 ;4)

Faire une figure



Calculer les coordonnées de D tel que ABCD soit un parallélogramme . ***ABCD parallélogramme*** $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. ***Posons D(x ;y) alors :***

$$\begin{cases} 5-1 &= 9-x \\ 0-4 &= 4-y \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 5 \\ y &= 8 \end{cases}$$ ***donc D(5 ;8)***

Conjecturer la nature de ABCD . ***Il semble que ABCD soit un carré***

Démontrer la conjecture . ***Par l'énoncé , on sait déjà que ABCD est un parallélogramme . Calculons AB , BC et AC pour déterminer s'il a deux côtés consécutifs égaux et un angle droit .***

$AB = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(9-5)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(9-1)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{64} = 8$

On a donc $AB = BC$ et ABCD losange .

De plus , $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ***donc par la réciproque de Pythagore , ABC est un triangle rectangle en B donc ABCD est un carré***

A retenir

$\overrightarrow{u}(x;y)$ alors $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

10 Colinéarité

A retenir

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles .

OU

$\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-x'y=0$

Exercice 41

Dans les cas suivants , dire si les vecteurs sont colinéaires :

$\overrightarrow{u}(5;4)$ et $\overrightarrow{v}(15;12)$:***oui car*** $\overrightarrow{v}=3\overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{t}(7;5)$ et $\overrightarrow{q}\left(\frac{7}{3};\frac{5}{3}\right)$: ***oui car*** $\overrightarrow{t}=3\overrightarrow{q}$

$\overrightarrow{z}(\sqrt{3};1)$ et $\overrightarrow{w}(3;\sqrt{3})$: ***oui car*** $\overrightarrow{w}=\sqrt{3}\overrightarrow{z}$

Exercice 42

On sait que les vecteurs suivants sont colinéaires . Déterminer x dans chaque cas :

$\overrightarrow{u}(x;5)$ et $\overrightarrow{v}(13;22)$: ***On doit avoir***

$$det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)=0 \iff \begin{vmatrix} x & 13 \\ 5 & 22 \end{vmatrix}=0 \iff 22x-13\times 5=0 \iff x=\frac{65}{22}$$

$\overrightarrow{u}(4;x)$ et $\overrightarrow{v}(x;5)$: ***On doit avoir***

$$det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)=0 \iff \begin{vmatrix} 4 & x \\ x & 5 \end{vmatrix}=0 \iff 20-x^2=0 \iff x=\pm\sqrt{20}=\pm 2\sqrt{5}$$

$\overrightarrow{u}(7;12)$ et $\overrightarrow{v}(x;7)$: ***On doit avoir***

$$det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)=0 \iff \begin{vmatrix} 7 & 12 \\ x & 7 \end{vmatrix}=0 \iff 49-12x=0 \iff x=\frac{49}{12}$$

Exercice 43

Dans un repère orthonormé , on donne les points A(4 ;5) , B(7 ;8) et C(3 ;2) . Les points A , B et C sont-ils alignés ? ***A, B et C sont alignés si et seulement si*** $\overrightarrow{AB}$ ***et*** $\overrightarrow{AC}$ ***sont colinéaires . Or*** $\overrightarrow{AB}(3;3)$ ***et*** $\overrightarrow{AC}(-1;-3)$ ***. On a :***

$det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=-9+3=-6\neq 0$ ***donc les vecteurs*** $\overrightarrow{AB}$ ***et*** $\overrightarrow{AC}$ ***ne sont pas colinéaires et les points A , B et C ne sont pas alignés***