Fiche méthode géométrie analytique

Les formules à retenir

Elles sont déjà dans votre cours mais abondance de bien ne nuit pas !

- Soient A(x_A,y_A) et B(x_B ,y_B) .

$\overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A ; y_B - y_A)$

$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Le milieu du segment [AB] a pour coordonnées : $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

- Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs .

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$

Déterminer les coordonnées d'un point

On donne une caractérisation vectorielle d'un point et on cherche ses coordonnées .

Exemple

Soient A(3 ;8) et B(-4 ;2) .Déterminer les coordonnées de G tel que $\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB}$

- *Déterminer les coordonnées des deux vecteurs de l'énoncé*

On pose G(x ;y) (puisque c'est l'inconnue)

On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A ; y_B - y_A)$ donc $\overrightarrow{AB}(-4-3;2-8)$

On obtient : $\overrightarrow{AB}(-7;-6)$

L'énoncé utilise $-2\overrightarrow{AB}$; calculons donc ses coordonnées : $-2\overrightarrow{AB}(-2\times(-7);-2\times(-6))$

On a : $-2\overrightarrow{AB}(14;12)$

On utilise la formule des coordonnées pour déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AG}$: on a $\overrightarrow{AG}\ (x_G - x_A ; y_G - y_A)$ d'où : $\overrightarrow{AG}(x-3; y-8)$

- *Utiliser l'égalité de l'énoncé*

Maintenant on utilise la formule de l'énoncé : $\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB}$ qui signifie que les coordonnées du premier vecteur sont égales aux coordonnées du deuxième vecteur

$\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB}$

$\begin{cases} x - 3 = 14 \\ y - 8 = 12 \end{cases}$ on obtient : $\begin{cases} x = 14 + 3 = 17 \\ y = 12 + 8 = 20 \end{cases}$

Et on n'oublie pas la conclusion : G(17 ;20)

Fiche méthode géométrie analytique

Utilisation de la colinéarité

Montrer que deux vecteurs sont colinéaires

On utilise la formule

Exemple

Soient A(5 ;7) , B(9 ;17) et C(3 ;2) . Montrer que les points A , B et C sont alignés

On commence par déterminer les coordonnées de vecteurs intéressants

$\overrightarrow{AB}(9-5;17-7)$ donc $\overrightarrow{AB}(4;10)$

$\overrightarrow{AC}(3-5;2-7)$ donc $\overrightarrow{AC}(-2;-5)$

On utilise la formule de colinéarité

Pour cela on peut écrire les coordonnées des vecteurs sous forme de colonnes pour ne pas se tromper dans le calcul . Puis on fait une multiplication en croisant :

$$\begin{array}{cc} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 4\times(-5)-10\times(-2) = -20+20 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc les points A , B et C sont alignés .

Utiliser la colinéarité pour déterminer des coordonnées d'un point

Là encore , on utilise la formule et on résout une équation

Exemple

Soient A(5 ;7) , B(8 ;4) et C(4 ;3) . Déterminer les coordonnées de D , point de l'axe des abscisses tel que (AB) et (CD) soient parallèles .

On commence par déterminer les coordonnées des vecteurs intéressants

$\overrightarrow{AB}(8-5;4-7)$ donc $\overrightarrow{AB}(3;-3)$

Maintenant , il faut les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$. Pour cela , il nous faut des renseignements sur D . On sait qu'il est sur l'axe des abscises donc $y_D = 0$.

On pose donc D(x ;0) . On utilise la formule pour avoir les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ en fonction de x : $\overrightarrow{CD}(x-4;0-3)$ donc $\overrightarrow{CD}(x-4;-3)$

On utilise maintenant la formule de colinéarité

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires donc

$$\begin{array}{cc} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{CD} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x-4 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Ce qui donne : $3(-3)-(-3)(x-4)=0$

$$-9+3x-12=0$$

$$3x-21=0$$

$$3x=21$$

$$x = 7$$

On conclut : D(7 ;0)

Fiche méthode géométrie analytique

Utilisation de l'orthogonalité

Montrer que des vecteurs sont orthogonaux

On utilise la formule

Exemple

Soient A(2 ;3) , B(1 ;0) , C(0 ;7) et D(9 ;4) . Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires

On détermine les coordonnées des vecteurs concernés

$\overrightarrow{AB}(1-2;0-3)$ donc $\overrightarrow{AB}(-1;-3)$

$\overrightarrow{CD}(9-0;4-7)$ donc $\overrightarrow{CD}(9;-3)$

On utilise la formule d'orthogonalité

$x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{CD}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{CD}} = -1\times 9 + (-3)\times(-3) = -9+9=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux donc (AB) et (CD) sont perpendiculaires .

Utiliser l'orthogonalité pour déterminer des coordonnées

On utilise encore la formule

Exemple

Soient A(7 ;9) et B(1 ;8) . Déterminer les coordonnées de D pour que D soit à l'intersection de l'axe des ordonnées et de la médiatrice de [AB] .

On commence par déterminer les coordonnées des vecteurs intéressants

D est sur la médiatrice de [AB] , appelons I le milieu de [AB] ; alors les vecteurs $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux .

$\overrightarrow{AB}(1-7;8-9)$ donc $\overrightarrow{AB}(-6;-1)$

I est le milieu de [AB] donc $I\left(\frac{7+1}{2};\frac{9+8}{2}\right)$ donc $I\left(4;\frac{17}{2}\right)$

D est sur l'axe des ordonnées donc on peut poser D(0 ;y) .

On utilise la formule pour avoir les coordonnées de $\overrightarrow{ID}$ en fonction de y : $\overrightarrow{ID}\left(0-4;y-\frac{17}{2}\right)$

soit $\overrightarrow{ID}\left(-4;y-\frac{17}{2}\right)$

On utilise maintenant la formule d'orthogonalité

Les vecteurs $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux donc $x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{ID}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{ID}} = 0$

D'où : $-6\times(-4)+(-1)\times\left(y-\frac{17}{2}\right)=0$

On résout : $24-y+\frac{17}{2}=0$

$\frac{65}{2}-y=0$

Donc y = $\frac{65}{2}$

On conclut : D$\left(0;\frac{65}{2}\right)$

Fiche méthode géométrie analytique

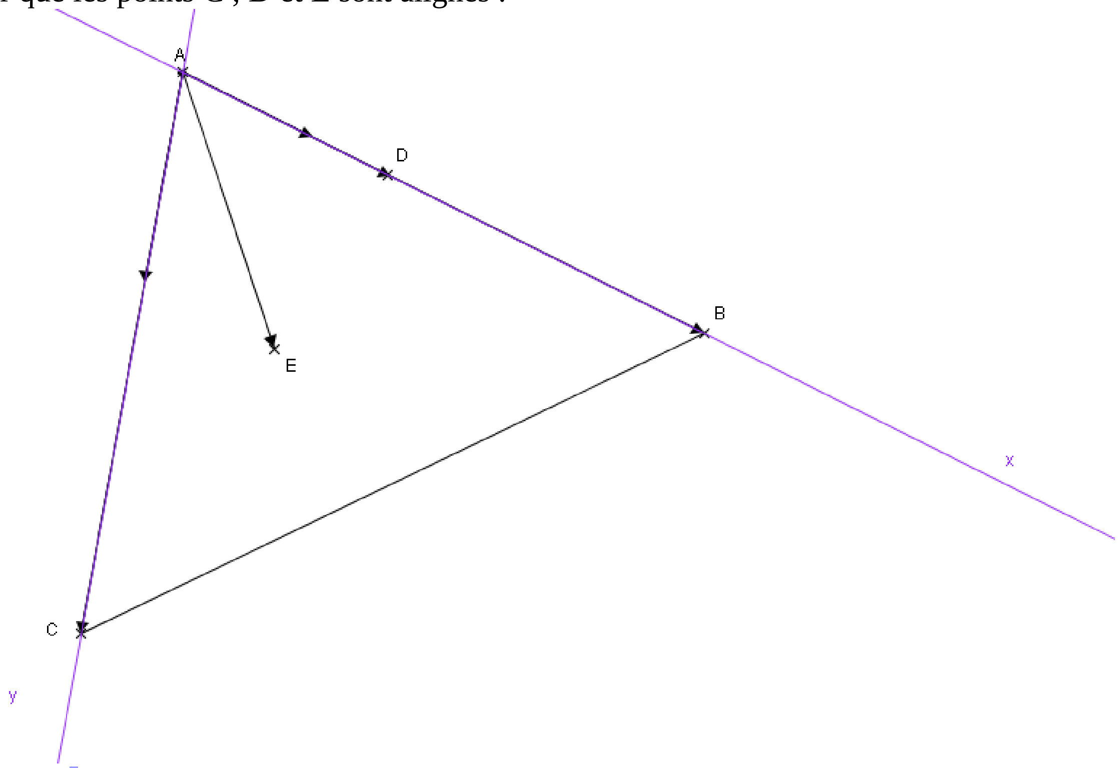
Utiliser un repère non classique

On peut être amené à choisir un repère pour faciliter les raisonnements et les remplacer par des calculs . Dans ce cas , on a souvent des repères non orthonormés .
Il faut donc bien repérer qui joue le rôle de l'axe des abscisses et qui joue celui de l'axe des ordonnées .
Puis on donne les coordonnées des points utiles dans ce repère

Exemple

Soit un triangle ABC . Placer D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et placer E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

Montrer que les points C , D et E sont alignés .



Choix d'un repère

Puisque les points D et E sont définis à partir des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ on va choisir les repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$
L'axe des abscisses est donc porté par la droite (AB) et le sens positif va de A vers B
L'axe des ordonnées est donc porté par la droite (AC) et le sens positif va de A vers C .
Un conseil : mettez le repère en couleur , les graduations et le « x » , le « y » , les flèches .

Coordonnées des points utiles

A(0 ;0) puisque c'est l'origine du repère
B(1 ;0) en regardant le repère
C(0 ;1) en regardant le repère
$D\left(\frac{2}{5};0\right)$ puisque D est sur la droite (AB) , il n'a pas d'ordonnée
$E\left(\frac{1}{4};\frac{3}{8}\right)$ en lisant l'égalité vectorielle .

Application des méthodes

Pour montrer que trois points sont alignés , il faut montrer que les vecteurs constitués par ces points sont colinéaires
Déterminons les coordonnées des vecteurs

$\overrightarrow{CD}\left(\frac{2}{5}-0;0-1\right)$ donc $\overrightarrow{CD}\left(\frac{2}{5};-1\right)$

$\overrightarrow{CE}\left(\frac{1}{4}-0;\frac{3}{8}-1\right)$ donc $\overrightarrow{CE}\left(\frac{1}{4};-\frac{5}{8}\right)$

Regardons si la condition de colinéarité est remplie :

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{5}{8} \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{5}{8}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)(-1) = -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires et les points C , D et E sont donc alignés .