BAC BLANC

Terminale S

Epreuve de Mathématiques spécialité

Coefficient 9

Durée 4 heures

Le candidat doit rédiger l'exercice de spécialité sur une copie à part

Le sujet comporte 7 pages .
L'utilisation de la calculatrice est autorisée .
Aucun document n'est permis .

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

Exercice 1 ***(5 points)***

Les parties A et B sont indépendantes

Un site internet propose des jeux en ligne

Partie A

Pour un premier jeu :

- Si l'internaute gagne une partie , la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$
- Si l'internaute perd une partie , la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la nième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n .

L'internaute gagne toujours la première partie donc $p_1 = 1$

1) Compléter l'arbre pondéré donné en annexe 1 .

2) Montrer que pour tout entier n entier naturel non nul , on a :
$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$$
3) Pour tout n entier naturel non nul , on pose :
$$u_n = p_n - \frac{1}{4}$$
   a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser
   b) Montrer que pour tout n entier naturel non nul , on a :
$$p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$$
   c) Déterminer la limite de p_n

Partie B

Dans un second jeu , le joueur doit effectuer 10 parties

On suppose que toutes les parties sont indépendantes

La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur .

1) a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier
   b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près
   c) Déterminer l'espérance de X

2) Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties . Chaque partie gagnée lui rapporte 8 € .
   a) Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur .
   b) Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 € . Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près .

Exercice 2 ***(4 points)***

Partie 1 : Restitution organisée des connaissances

Pré-requis : pour tous x et y réels , on admet la formule : $e^{x+y} = e^x e^y$

Démontrer en utilisant ce pré-requis la formule : $e^{nx} = (e^x)^n$ pour tout x réel et pour tout n entier naturel .

Partie 2

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2 e^{-x} \qquad g(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2$$

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire d'éventuelles conséquences graphiques .
2) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations
3) Etudier le signe de f
4) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection des courbes de f et g
5) Etudier la position relative de ces courbes
6) Tracer les courbes de f et de g dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm .

<u>Exercice 3</u> ***(5 points)***

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, unité graphique 1 cm

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice

Soient A , B et C les points d'affixes respectives a = 3 + 5i , b = - 4 + 2i et c = 1 + 4i

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (2-2i)z + 1$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f

2) a) Déterminer l'affixe du point B' image de B par f

   b) Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales

3) Soit M le point d'affixe z = x + i y , où on suppose que x et y sont des entiers relatifs . Soit M' l'image de M par f . Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}\ et\ \overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si : x + 3 y = 2

4) On considère l'équation (E) : x + 3y = 2 où x et y sont des entiers relatifs .
   a) Vérifier que le couple (- 4 ; 2) est une solution de (E)
   b) Résoudre (E)
   c) En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle [- 5 ; 5] et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}\ et\ \overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux . Placer ces points sur la figure .

Exercice 4 ***(6 points)***

Partie A : étude du signe d'une fonction

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 4lnx$$

1) Déterminer le tableau de variations de la fonction f en précisant les limites de f en 0 et en $+\infty$
2) Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution a et une seule dans l'intervalle $]0;+\infty[$.
3) En déduire le signe de f(x) selon les valeurs du réel x strictement positif .

Partie B : une valeur approchée du réel a défini dans la partie A

Sur le graphique de l'annexe 2 , on a tracé une partie de la courbe représentative C de la fonction g définie sur ℝ par :

$$g(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2}$$

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = g(u_n) \; pour \; tout \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Vérifier que a est l'unique solution de l'équation : g(x) = x
2) Au moyen de la courbe C et de la droite d'équation y = x , représenter les termes u_1 , u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses .
   Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?
3) On admet que pour tout entier naturel n , $u_{2n} \leq a \leq u_{2n+1}$.
   En utilisant la calculatrice , déterminer le plus petit entier n pour lequel les trois premières décimales de u_n et u_{n+1} sont identiques .
   En déduire que 0,838 est une valeur approchée de a à 10^{-3} près

Partie C : un problème de distance

On appelle Γ la courbe représentative dans un repère orthonormal de la fonction φ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $\varphi(x) = 2lnx$

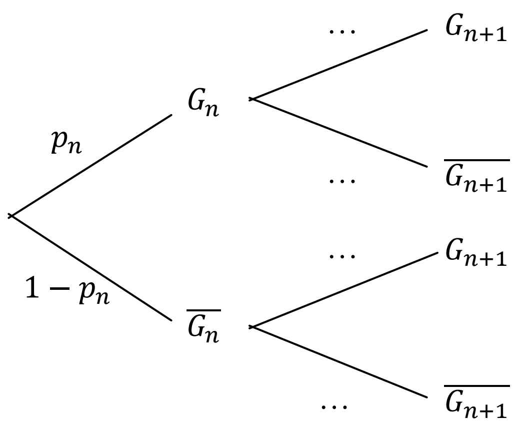
L'objectif de cette partie est de démontrer que parmi les points de la courbe Γ , il y en a un et un seul qui est plus proche de l'origine O que tous les autres

1) Soient M un point de la courbe Γ et x son abscisse . Exprimer OM en fonction de x
2) a) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $h(x) = x^2 + 4(lnx)^2$.
   Etudier les variations de la fonction h . On pourra utiliser la partie A
   b) En déduire qu'il existe un unique point A de la courbe Γ tel que pour tout point M de Γ distinct de A , on ait : OM > OA

3) Démontrer que la droite (OA) est perpendiculaire à la tangente T_A à la courbe Γ au point A .

NOM : **Prénom :**

ANNEXE 1 : exercice 1



ANNEXE 2: exercice 4